EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Stappenplannen bij wiskunde: handig of toch niet?

Reactie op 'Zorgvuldig met wijsheid en mildheid'

Derdegraadsvergelijkingen meetkundig oplossen

Onderzoeksgericht statistiekonderwijs

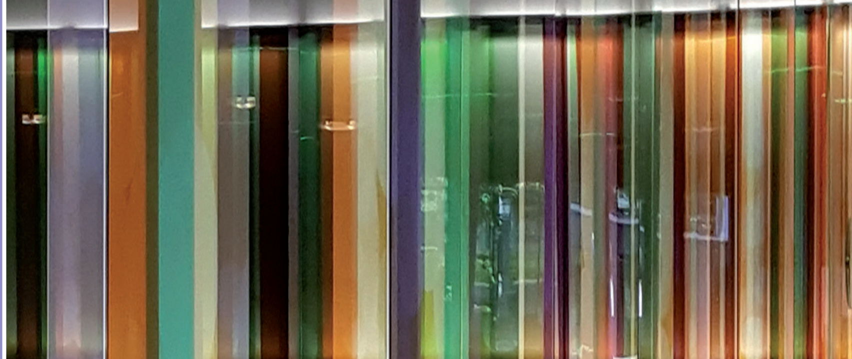
25 jaar Wereldwiskunde Fonds

NR.7

JAARGANG 93 - JUNI 2018



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 93 NR.7

IN DIT NUMMER

Lichtobject in de fietsenstalling van het station Europapark Groningen. Ontwerp: NOL (Groningen), uitvoering: glasatelier Ballast en Bonekamp (Groningen)

Foto: Liesbeth Coffeng

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Euclides nr 2 met zandstrooi kunstwerk van Elvira Wersche

Kort vooraf

Op dit moment van schrijven zijn de examens voorbij, zijn eerste en tweede correctoren druk aan het werk en voel ik me altijd een beetje schuldig, omdat ik ook nog eens een zevental recensenten heb gevraagd om met een bijna onbeleefde deadline al die examens te bespreken voor ons traditionele examennummer. Dat nummer werpt zijn schaduw al vooruit op deze editie met twee examen gerelateerde bijdragen.
Gerard Koolstra gaat in op het formuleblad bij het havo wiskunde A-examen: ϕ de verschilmaat wordt onder de loep genomen, en Theo Jan van de Pol en Ab van der Roest geven een reactie op het artikel ‘Zorgvuldig met wijsheid en mildheid’ van Lidy Wesker en Peter Kop uit *Euclides* 93-5. Discussie en dialoog is altijd goed.
Zo ook de talrijke discussies die gevoerd zijn over het eerste rapport van het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde van Curriculum.nu. De reactie van de NVvW is te lezen op de website en inmiddels is het tweede tussenrapport verschenen en loopt de tweede consultatieperiode. Ik nodig jullie graag uit om je mening daarover in een bijdrage voor *Euclides* te geven, zodat wij onze eigen, weliswaar trage, discussie kunnen voeren.
En er wordt weer gestrooid! Op de voorkant van *Euclides* 93-2 stond een zandstrooi kunstwerk van Elvira Wersche. Dat laatste project, *Kwarts,* dateert alweer van 2015 en nu wordt er gewerkt aan *Germinis* (ontkieming) in CHV Noordkade te Meijerijstad (Veghel), van 15 juni t/m 8 juli.
Een idee voor een excursie samen met de CKV docent in de laatste dagen van het schooljaar?
Tot slot: namens de hele redactie wensen we je een fijne vakantie!

Tom Goris

STAPPENPLANNEN: HANDIG OF TOCH NIET?

Irene van Stiphout
Geeke Bruin-Muurling

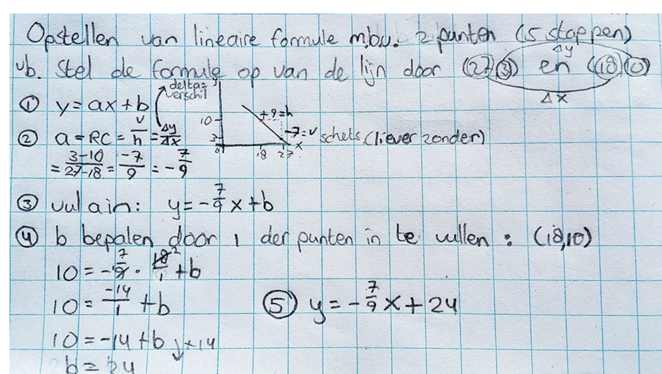
Stappenplannen kunnen handig zijn. Ze bieden houvast bij het uitvoeren van procedures. Maar er zit ook een andere kant aan: een snelle en handige weg naar het antwoord leidt niet altijd tot het gewenste begrip.

Inleiding

In wiskundeboeken en instructiefilmpjes op internet zijn talloze stappenplannen te vinden. In heldere, overzichtelijke stappen worden leerlingen hiermee geholpen hun wiskundige problemen op te lossen. Ook in wiskundelessen spelen stappenplannen een rol. Al die stappenplannen kunnen helpen om het uitvoeren van procedures te ondersteunen. De vraag is echter wat leerlingen ervan leren. In dit artikel gaan we in op stappenplannen bij het opstellen van de vergelijking van een lijn en bij het oplossen van lineaire vergelijkingen.

Stappenplannen voor lineaire verbanden

Binnen het onderwerp lineaire verbanden en lineaire vergelijkingen leren leerlingen allerlei problemen op te lossen. Voor een deel gaat het om het oplossen van standaardproblemen die vaak, maar niet altijd, bestaan uit dezelfde stappen. Om leerlingen te helpen deze stappen te onthouden, worden stappenplannen aangeboden. Een voorbeeld hiervan, voor het opstellen van een formule van een lineair verband, is te zien in figuur 1.



figuur 1 Aantekeningen van een leerling van een door de docent op het bord aangeboden stappenplan

Aan de hand van een voorbeeld wordt in vijf stappen beschreven hoe de formule van een lineair verband kan worden gevonden als twee punten zijn gegeven. In het voorbeeld zijn de gegeven punten (27, 3) en (18, 10). De eerste stap is het opschrijven van de algemene formule $y = ax + b$. In de tweede stap wordt de richtingscoëfficiënt bepaald aan de hand van $\Delta y/\Delta x$. De derde stap is het invullen van de gevonden richtingscoëfficiënt in de algemene formule. In de vierde stap wordt een punt ingevuld zodat de b wordt gevonden. Tot slot is de vijfde stap het opschrijven van de vergelijking. Als leerlingen zelf aan de slag gaan met vergelijkbare opgaven kunnen ze het voorbeeld in het stappenplan volgen. Ook bij het oplossen van lineaire vergelijkingen zien we stappenplannen. Een voorbeeld hiervan staat in figuur 2.

Lineaire vergelijking oplossen

1. Werk de haakjes weg
2. Zorg dat alles met x links van het =-teken komt te staan
3. Zorg dat het losse getal rechts van het =-teken komt te staan
4. Zorg dat er links van het =-teken alleen nog maar x staat

figuur 2 Typerend stappenplan voor het oplossen van lineaire vergelijkingen

Stapsgewijs staat beschreven wat de leerling moet doen om de oplossing te vinden. De nadruk ligt hier op het veegproces: eerst alle haakjes weg, dan alle x-en naar de linkerkant van het =-teken en alle getallen naar de rechterkant. Deze voorbeelden laten zien dat een stappenplan een heldere en veilige route kan bieden naar

het antwoord. Door alle stappen te volgen en precies te doen wat in elke stap staat beschreven, wordt de leerling begeleid van de vraag naar het antwoord. Iedere stap is nauw omschreven en overzichtelijk. Het is duidelijk waar de leerling moet beginnen en evenzo is het duidelijk waar het einde is, namelijk bij de laatste stap. Het opknippen van een complex probleem in overzichtelijke stappen maakt dat het probleem toegankelijker wordt. Voor het oplossen van standaardproblemen lijkt dit een zeer effectieve methode. De vraag is hoe het zit het met het behalen van doelen die verder reiken dan het kunnen oplossen van deze standaardproblemen.

Wat leren de leerlingen?

Wat leren leerlingen van het uitvoeren van stappenplannen? Op het niveau van de procedure zullen ze er zeker profijt van hebben. De doelen die verder gaan dan de procedure lijken juist moeilijker te behalen. Het gebruik van een stappenplan nodigt niet uit om na te denken over de procedure als geheel. Terwijl juist het creëren van overzicht over de procedure, waarin de procedure als geheel en op zichzelf staand betekenis krijgt en object wordt van verdere bestudering, van belang is om verder te komen in het begrip dan alleen het foutloos kunnen uitvoeren van de procedure.[1] Het stappenplan in figuur 1 gaat voorbij aan het idee dat die formule op meerdere manieren gevonden kan worden. Hoe stel je de formule op als één van de gegeven punten op de *y*-as ligt? In dat geval is de *b* meteen duidelijk. Of stel dat één van de punten *x*-coördinaat 1 heeft. Dan is terugtellen met de richtingscoëfficiënt wellicht handiger om de *b* te vinden dan via het invullen van een punt. Stel bijvoorbeeld dat één van de punten (1, 4) is en gevonden is dat de richtingscoëfficiënt $a = 2$. Het snijpunt met de verticale as is dan (0, 2) (via één stap naar links, twee naar beneden). Natuurlijk is deze strategie niet altijd handig, maar soms juist wel. Voor leerlingen is het van belang dat ze de flexibiliteit ontwikkelen om hier op verschillende manieren naar te kunnen kijken. Die flexibiliteit wordt afgestraft als leerlingen in een toetssituatie gedwongen worden het aangereikte stappenplan te gebruiken.

Beginnen bij stap 2 of verder

De voorgeschreven stappen in een stappenplan kunnen ook in de weg zitten als leerlingen problemen krijgen voorgelegd waarin er niet bij stap 1 van het stappenplan begonnen hoeft te worden, maar bij stap 2 of nog verder. De vraag is dan in hoeverre leerlingen in staat zijn te beseffen dat een deel van het oplossingsproces dat wordt beschreven door het stappenplan al is uitgevoerd. In een beperkte uitbreiding van het onderzoek van Van Stiphout[2] werd aan een groep van vijftig eerstejaars studenten van verschillende studies van de Technische Universiteit Eindhoven gevraagd de vergelijking $(x - 5)(x + 2)(x - 3) = 0$ op te lossen.

Ruim de helft van de studenten wist de vergelijking op te lossen ($x - 5 = 0$ of $x + 2 = 0$ of $x - 3 = 0$, dus $x = 5$, $x = -2$ of $x = 3$). Een deel van de studenten begon met het uitwerken van de haakjes, zie de uitwerking in figuur 3.

Los op:

$(x - 5)(x + 2)(x - 3) = 0.$

$(x^2 - 3x \; -10)(x - 3) = 0$

$x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 9x - 10x + 30 =$

$x^3 - x + 30 = 0$

?

figuur 3 Uitwerking van een eerstejaars student TU/e

Deze studenten waren vervolgens niet in staat om te bedenken hoe verder. Ze herkenden niet dat de ontbinding waar ze naar op zoek waren al was gegeven en dat de oplossingen eenvoudig te zien waren. Ze waren niet in staat te ontsnappen aan het automatisme van haakjes wegwerken, of in de woorden van Freudenthal[3], 'to unclog an automatism'. Bij het oplossen van vergelijkingen zien we dat de zekere route naar het einde alleen werkt als het probleem wordt gepresenteerd in de vorm zoals in het stappenplan vermeld. Een kleine afwijking in de vraag kan ervoor zorgen dat het stappenplan niet meer van toepassing is met als mogelijk gevolg dat een leerling niet weet wat te doen. Het stappenplan in figuur 2 werkt bijvoorbeeld alleen als de laatste stap van het vegen leidt tot de vergelijking $x =$ getal. Vergelijkingen van het type waarin de laatste regel leidt tot een tautologie zoals bijvoorbeeld $x = x$ of een tegenspraak zoals $x = x - 4$ passen niet in het plan. In het onderzoek van Van Stiphout[2] werd aan vwo-5-leerlingen de vergelijking $2(3x + 2) = 3(2x - 1) + 7$ voorgelegd. Uitwerken van de haakjes geeft $6x + 4 = 6x + 4$, dus iedere $x \in \mathbb{R}$ is een oplossing. Ruim 80% van de leerlingen was niet in staat om de juiste conclusie te trekken uit de tautologie die ze vonden. Een robuust begrip van wat ze aan het doen waren of het vermogen om een andere aanpak te kiezen hadden deze leerlingen niet.

Flexibiliteit

De manier die in een stappenplan wordt beschreven, is niet altijd de kortste of meest elegante manier.

Een voorbeeld is de vergelijking $\frac{x-1}{2}=3(x-1)$.

Vanuit het stappenplan van figuur 2 gedacht zouden hier eerst de breuk en de haakjes moeten worden weggewerkt, leidend tot $x - 1 = 6x$ - 6. Vervolgens de x-en naar links en getallen naar rechts: $-5x = 5$. En dan nog delen door -5, dus de oplossing is $x = 1$. Je zou kunnen zeggen dat het stappenplan werkt, want er komt een oplossing. We denken dat een andere manier van kijken hier interessant kan zijn voor het ontwikkelen van 'symbol sense'.[4] Onderdeel van symbol sense is het vermogen om globaal naar vergelijkingen te kunnen kijken.[5] Dezelfde vergelijking kan dan gezien worden als $\frac{1}{2}(x - 1) = 3(x - 1)$ of als ½✋ = 3✋. Een volgende stap in een redenering kan zijn dat zo'n type vergelijking alleen een oplossing heeft als wat onder ✋ gelijk is aan 0 oftewel $(x - 1) = 0$. Maar het kan ook via een tussenstap $2\frac{1}{2}(x - 1) = 0$. Die verschillende manieren om tegen deze vergelijking aan te kijken maken deel uit van de flexibiliteit om met deze vergelijkingen om te gaan. Die flexibiliteit wordt gezien als een belangrijk onderdeel van symbol sense, maar kan in de verdrukking komen bij het gebruik van een vast voorschrift.[4] [5]
Een ander bezwaar zit in de zorg dat het gebruik van verschillende stappenplannen voor vergelijkbare problemen leidt tot verkokering.[6] Hiermee bedoelen we het idee dat voor elk type opgave een aparte strategie wordt aangeleerd. Voor het ontwikkelen van wiskundig inzicht is het juist van belang dat leerlingen de verbinding kunnen maken tussen verschillende typen problemen en de wiskundige concepten die hierachter liggen.

'WAT ALS WE HET PROBLEEM IETS VERANDEREN? IS HET STAPPENPLAN DAN NOG GELDIG?'

Het zoeken naar overeenkomsten en verschillen in verschillende strategieën kan bijdragen aan het vergroten van het wiskundig inzicht. Ten slotte zien we bezwaar in het beeld dat leerlingen kunnen krijgen van wiskunde. De druk in het onderwijs om leerlingen goede resultaten te laten behalen is hoog.[7] Dat kan leiden tot een (onbewuste) focus op de vraag hoe leerlingen geleerd kan worden om antwoorden te vinden op(standaard)problemen, ook wel 'answer getting' genoemd.[8] Dit is verleidelijk, maar tevens een valkuil omdat het juist met het oog op de toekomst van belang is om te investeren in de onderliggende wiskundige ideeën.[9] Het aanreiken van stappenplannen kan op korte termijn resultaat bieden. Op de langere termijn kan dit ervoor zorgen dat leerlingen wiskunde gaan zien als een vak waarin het gaat om het snel vinden van het antwoord.[10] [11]

Conclusie en discussie

In dit artikel hebben we laten zien dat het gebruik van stappenplannen leerlingen houvast kan bieden.
Maar er zijn ook nadelen aan stappenplannen. Door nadruk op één enkele manier van oplossen is er weinig ruimte voor flexibel strategiegebruik die rekening houdt met getal- of gevalspecifieke kenmerken van de opgave. Dit wordt versterkt bij het intrainen van stappenplannen waardoor hele sterke automatismen kunnen ontstaan om direct te beginnen zonder eerst naar de opgave te kijken. Bovendien dekken de stappenplannen niet altijd alle randgevallen af, of leveren niet altijd de kortste of meest elegante oplossing. Tot slot kan het gebruik van in te trainen stappenplannen verkokering in de hand werken en een beeld van wiskunde als puur instrumenteel bevestigen.

Is het gebruik van stappenplannen dan af te raden? Nee, we willen er zeker niet voor pleiten om stappen-plannen niet te gebruiken. Wel denken we dat het van belang is in het gebruik van stappenplannen tegemoet te komen aan bovengenoemde bezwaren. Hiervoor zien we meerdere mogelijkheden. Zo kan leerlingen gevraagd worden om zelf een stappenplan te maken.
Op die manier worden leerlingen expliciet uitgedaagd om over het oplossingsproces als geheel na te denken. Een andere mogelijkheid is om bijvoorbeeld in een klassengesprek na te gaan wat voor beperkingen het stappenplan heeft. Hierin kunnen vragen aan de orde komen als in welke gevallen werkt het niet? Of kan het ook anders dan in het stappenplan beschreven? Het kan ook interessant zijn om met leerlingen te onderzoeken voor welk type problemen het stappenplan werkt. Wat als we het probleem iets veranderen? Is het plan dan nog geldig? Op die manier kunnen leerlingen juist worden uitgedaagd om meer flexibel te leren kijken. Uiteraard heeft de docent hierin een cruciale rol.

Literatuur

[1] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
[2] Van Stiphout, I. (2011). The development of algebraic proficiency. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, *http://alexandria.tue.nl/extra2/719774.pdf.*
[3] Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.
[4] Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 14(3), 24-35.
[5] Gravemeijer, K. (1990). Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 10(2), 29-33.
[6] Bruin-Muurling, G. (2010). The development of proficiency in the fraction domain: Affordances and constraints in the curriculum. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, *http://alexandria.tue.nl/extra2/692951.pdf.*
[7] Van Stiphout, I. & Bruin-Muurling, G. (2016). De verleidingen van het kortste pad. Geraadpleegd van *http://www.rekenenwiskunde21.nl.*
[8] Gravemeijer, K., Bruin-Muurling, G., Kraemer, J.- M., & Van Stiphout, I. (2016). Shortcomings of mathematics education reform in the netherlands, a paradigm case? *Mathematical Thinking and Learning*, 18(1), 25-44.
[9] Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F.-L., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-19.
[10] Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Wiliam, D., & Johnson, D. (1997). *Effective Teachers of Numeracy: Report of a study carried out for the Teacher Training Agency*. London: King's College, University of London.
[11] Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Over de auteurs

Irene van Stiphout is werkzaam als lerarenopleider bij de HAN en als toetsdeskundige bij Cito. Emailadres: *irene.vanstiphout@han.nl.*
Geeke Bruin-Muurling is zelfstandig vakdidacticus en onderwijsontwikkelaar en -vernieuwer. Emailadres: *geeke@bruin-muurling.nl.*

Theo Jan van de Pol
Ab van der Roest

RECHTVAARDIGHEID BOVEN ALLES

In *Euclides* 93-5 hielden Lidy Wesker en Peter Kop een pleidooi voor het corrigeren met wijsheid en mildheid. Niet iedereen is het met die mildheid eens. Theo Jan van de Pol en Ab van der Roest schreven een reactie en bespraken die met een Docent Ontwikkel Team in Wageningen waar ze veel instemming kregen.

Inleiding

Met belangstelling hebben we het artikel met de titel 'Zorgvuldig met wijsheid en mildheid' gelezen.[1]
De auteurs stellen daarin de volgende vragen centraal: 'Krijgt een leerling wel wat hij verdient?' en 'Krijgen leerlingen met dezelfde prestatie ook dezelfde beloning?' Belangrijke vragen als het gaat om het beoordelen van examenwerk. Iedereen zal deze vragen volmondig positief willen beantwoorden. Toch worden er in het artikel enkele voorbeelden besproken, waarbij keuzes worden gemaakt waar we graag enkele kanttekeningen bij willen plaatsen. We denken namelijk dat de vraag 'Wordt het werk van de leerling rechtvaardig nagekeken?' niet in alle gevallen met *ja* kan worden beantwoord. We hebben onze mening aan enkele collega's van het Docent Ontwikkel Team van de WUR (Wageningen University & Research) voorgelegd en bemerkten dat daar ons gevoel van ongenoegen breed gedeeld werd.

Als uitgangspunt nemen we dat leerlingen gelijk behandeld moeten worden bij het nakijken van het examen. Dat is rechtvaardig. Dit uitgangspunt rechtvaardigt echter niet de keuzes die de schrijvers maken. Als het CvTE schrijft dat bij een wiskunde B-examen de leerling blijk moet geven antwoorden en bewijsvoeringen door middel van zorgvuldig gebruik van notaties, symboliek en een heldere redeneertrant verkregen te hebben, dan mogen we dus een bepaalde exactheid verwachten.[2] Uiteraard bij bewijzen en aantonen, zoals de schrijvers zeggen, maar evengoed ook bij andere berekeningen.

We geven hiervan een voorbeeld, zie kader 1.

Van een rechthoek is gegeven: *lengte* = 7 + 0,2*x* en *breedte* = 4 + 0,5*x*.

Toon aan dat *oppervlakte* = 28 + 4,3*x* + 0,1x^2.

kader 1

Bovenstaande opgave wordt anders uitgewerkt dan wanneer gevraagd zou zijn naar de formule van de oppervlakte. In het eerste geval eisen we de tussenstap 28 + 3,5*x* + 0,8*x* + 0,1x^2. In het tweede geval zou deze tussenstap weggelaten kunnen worden. De aard van de vraag heeft echter geen invloed op de notatie die we eisen.

De voorbeelden in Zorgvuldig met wijsheid en mildheid

Bij *Voorbeeld 3,* zie figuur 1, is duidelijk dat niet de juiste symbolen worden gebruikt en is een punt aftrek vanzelfsprekend. Als daarbij ook de nomenclatuur aangeeft dat we ln(*t*) moeten schrijven in plaats van ln *t* is dat een kwestie van een fout als de leerling het niet doet. Hetzelfde geldt bij *Voorbeeld 4,* zie figuur 2. Daarnaast is bij dit voorbeeld het vergeten van de haakjes een verschrijving waarvoor we overeenkomstig het correctievoorschrift een punt in mindering brengen. De schrijvers bepleiten een bepaalde mildheid, maar dat is in strijd met de exactheid van wiskunde.

$T'_{nat} = 1050 \cdot e^{-\ln^2 t + 6\ln t - 9} \cdot \left(-2 \cdot \ln t \cdot \frac{1}{x} + \frac{6}{x}\right)$

$= 1050 \cdot e^{-\ln(t)^2 + 6\ln t - 9} \cdot \left(\frac{-2\ln t}{x} + \frac{6}{x}\right) = 0$

$= 1050 \cdot e^{-\ln(t)^2 + 6 \cdot \ln t - 9} \cdot \left(\frac{-2\ln t + 6}{x}\right) = 0$

figuur 1

$T_{nat}(t) = 1050\, e^{-(\ln t)^2 + 6\ln(t) - 9} \cdot \left(-2(\ln t) \cdot \frac{1}{t} + \frac{6}{t}\right)$

$0 = 1050\, e^{-(\ln t)^2 + 6\ln(t) - 9} \cdot -2(\ln t) \cdot \frac{1}{t} + \frac{6}{t}$

$0 = 1050 \cdot \frac{-2\ln t + 6}{t} \cdot e^{-(\ln t)^2 + 6\ln(t) - 9}$

$1050 \cdot \frac{-2\ln t + 6}{t} = 0$ of $e^{-(\ln t)^2 + 6\ln(t) - 9} \neq 0$

$-2\ln t + 6 = 0$

figuur 2

Een ander punt van kritiek is *Voorbeeld 1,* zie figuur 3, waar de Grafische Rekenmachine (GR) de wiskunde vervangt. We weten dat wiskunde haar eigen taal heeft. Een vergelijking opschrijven is dus een wezenlijk deel van deze wiskunde. Als een leerling dat niet doet, maar meteen met de GR aan de slag gaat, geven we natuurlijk wel punten als beschrijving en antwoord goed zijn, maar een punt aftrek is hier wel op zijn plaats. We leren, als het goed is, de leerling aan hoe ze moeten noteren. Doen ze dat niet, dan doen ze zichzelf tekort, zeker als ze wel het inzicht hebben wat er gebeuren moet. Zoals eerder gezegd is het argument dat bewijs- en toon-aan-vragen anders behandeld moeten worden niet overtuigend.

Graph → x-cal (230) → $x = 2{,}50 \cdot 10^{3}$ en $x = 7{,}50 \cdot 10^{3}$

figuur 3

Voorbeeld 2, zie figuur 4, wordt door de schrijvers gebruikt om soms, in afwijking van het correctievoorschrift, een hogere waardering te geven. Onzes inziens is dat hier niet terecht, omdat de leerling wel mooie dingen opschrijft, wiskundig correct, maar deze helpen niet om een antwoord te vinden op de gestelde vraag. De koppeling tussen *f '* en *g'* wordt nergens gelegd. Daarnaast is het missen van de factor juist de allesbeslissende stap voor het vinden van een *a* en *b*. Dat dit inzicht ontbreekt, ontneemt aan al het voorgaande de waarde. Als we hier zouden overdrijven, zouden we alles wat mooi en correct is moeten belonen, ook al doet het niet ter zake.

$f(x) = 3\sin(x) - 2\sin^2(x)$

$f'(x) = 3\cos x - 4\cos x \cdot \sin x$

– helling berekenen bij $x = 0$ en $x = \pi$

$f'(0) = 3\cos 0 - 4\cos 0 \cdot \sin 0$
$= 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 0$
$= 3$

$f'(\pi) = 3\cos\pi - 4\cos\pi \cdot \sin\pi$
$= 3 \cdot -1 - 4 \cdot -1 \cdot 0$
$= -3$

We weten dat het een berg parabool dus a is negatief ook ligt de top bij $x = 0{,}5\pi$.

$y = (-x^2 + \pi x) \cdot$ factor, dus $a = -1$ en $b = \pi$.

figuur 4

We pleiten dus zeker wel voor gelijke behandeling, willen we de leerlingen ook geven waar ze recht op hebben. Wanneer we echter ingaan tegen de exactheid van de wiskunde is het geven van punten niet meer rechtvaardig. Wanneer we de exactheid van noteren loslaten, vrezen we voor een glijdende schaal. De repetities en toetsen kijken we na in de examenstijl, maar dan worden we daar ook 'soepeler' wat kan leiden tot nog slordiger noteren van de leerlingen.

Alle bolletjes

Ten slotte nog een opmerking over 'Alle bolletjes genoteerd en sprokkelen'. Dit blijft altijd een lastig onderwerp en discussie hierover met een tweede corrector is niet erg. Bij de uitwerking in het CV is een bepaalde volgorde van oplossen gekozen, maar soms is het zeer goed mogelijk een andere volgorde te kiezen. Dan kan bijvoorbeeld een derde bolletje gehonoreerd worden terwijl de eerste twee bolletjes er niet staan. Lastiger is het wanneer bij een van de eerste bolletjes een fout gemaakt wordt. Mag je dan wel of niet doorgaan? Is het wel of niet een versimpeling? Is het meer of minder dan een rekenfout? We denken dat hier altijd wel discussie over zal blijven bestaan. Dit zal ook zeker gelden wanneer er een alternatieve manier van oplossen gekozen wordt. Als deze manier goed gaat, is er geen probleem, maar wanneer er ergens een fout gemaakt wordt, kan er discussie zijn over de waardering van de opgave. Docenten komen daar als het goed is wel uit met elkaar.
Voor ons hoeft het CV niet gedetailleerder. Wel zou het in sommige gevallen kunnen helpen om een alternatieve oplossingsroute, voorzien van bolletjes, op te nemen.

> 'WANNEER WE DE EXACTHEID VAN WISKUNDE LOSLATEN, VREZEN WE VOOR EEN GLIJDENDE SCHAAL.'

We hopen met ons artikel een bijdrage te leveren aan een bredere discussie over de exactheid van de wiskunde en de manier waarop we onze leerlingen hierover examineren. We willen niet opnieuw overvallen worden door een allesbepalend artikel over dit onderwerp, zonder dat het veld zich hierover heeft uitgesproken. Dat is rond wiskunde A al gebeurd met het artikel *Gelijke monniken, gelijke kappen*[3] en daar hebben we niet opnieuw behoefte aan.

Noten

[1] Wesker, L. & Kop, P. (2018). Zorgvuldig met wijsheid en mildheid, *Euclides, 93*(5), 4-7.
[2] Wesker, L. & Kop, P. (2018). Zorgvuldig met wijsheid enSyllabus Centraal Examen vwo wiskunde B, subdomein A3
[3] Tjon Soei Sjoe, K., Kop, P. Haselen, Marjolein van & As, D. van. (2015). Gelijke monniken, gelijke kappen, *Euclides 90*(3), 16-20.

Over de auteurs

Theo Jan van de Pol en Ab van der Roest zijn deelnemers aan de DOT Wageningen.
Beiden zijn docent op het Ichtus College te Veenendaal.
E-mailadressen: *plt@ichthuscollege.nl* en *rst@ichthuscollege.nl*

φ ALS VERSCHILMAAT

Gerard Koolstra

φ is een maat om het verschil tussen groepen aan te geven.
Op het formuleblad van het havo-examen wordt de formule gegeven.
Om φ beter te begrijpen onderzoekt Gerard Koolstra de achtergronden van deze formule.

Inleiding

In de nieuwe statistiekprogramma's speelt het kwantificeren en beoordelen van verschillen tussen twee groepen een belangrijke rol. Bij het CE wiskunde A havo is maar liefst een hele pagina gewijd aan vuistregels voor de grootte van het verschil tussen twee groepen. Bovenaan prijkt een formule (1) voor φ (phi), zie figuur 1.

2×2 kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$

- als $phi < -0{,}4$ of $phi > 0{,}4$, dan zeggen we "het verschil is groot",
- als $-0{,}4 \leq phi < -0{,}2$ of $0{,}2 < phi \leq 0{,}4$, dan zeggen we "het verschil is middelmatig",
- als $-0{,}2 \leq phi \leq 0{,}2$, dan zeggen we "het verschil is gering".

figuur 1 Uit het formuleblad van het CE havo wiskunde A 2017

Op zoek naar meer informatie over φ kom je ook andere formules tegen voor φ (of ϕ^2), en namen van andere formules die min of meer gelijkwaardig zijn. Hieronder een poging om iets meer helderheid te verschaffen over φ en aanverwanten.

Voorbeeld

Als voorbeeld gaan we uit van de keuze van mannelijke en vrouwelijke leerlingen voor wiskunde A of wiskunde B, zie tabel 1. Duidelijk is te zien dat er verschil is. Bij wiskunde A zijn de vrouwelijke leerlingen duidelijk in de meerderheid, bij wiskunde B niet. Maar hoe groot is dat verschil, hoe kun je dat meten / berekenen?
Een veel gebruikte aanpak is bovenstaande tabel te vergelijken met een evenredige verdeling waarbij het geslacht geen invloed heeft op de wiskundekeuze. Van alle leerlingen koos 60% (72/120) voor A, en 40% voor B. Wanneer we die verdeling voor beide groepen gebruiken krijgen we tabel 2. In deze verhoudingstabel is de wiskundekeuze volledig genderneutraal, terwijl de kolom- en rijtotalen, de *marginalen*, onveranderd zijn gebleven.

	man	vrouw	totaal
wis A	30	42	72
wis B	25	23	48
totaal	55	65	120

tabel 1

	man	vrouw	totaal
wis A	33	39	72
wis B	22	26	48
totaal	55	65	120

tabel 2

Een volgende stap is te letten op de verschillen.
Dit levert het volgende simpele beeld, zie tabel 3. Als de marginalen vastliggen, betekent een verlaging van de cel linksboven met 3 onvermijdelijk een *verhoging* van de cellen daarnaast en daaronder met 3, en weer verlaging met 3 van de vierde cel. In absolute zin zijn de verschillen (op het teken na) voor elke cel gelijk, *relatief* gezien meestal niet.

	man	vrouw	totaal
wis A	-3	3	0
wis B	3	-3	0
totaal	0	0	0

tabel 3

Bij de berekening van chi-kwadraat (χ^2) worden de verschillen eerst gekwadrateerd, en daarna gedeeld door de overeenkomstige getallen in de verhoudingstabel.
Dit levert tabel 4 op. χ^2 is nu per definitie gelijk aan de som van deze getallen:

$$\chi^2 = \frac{9}{33}+\frac{9}{39}+\frac{9}{22}+\frac{9}{26}=9\times\left(\frac{1}{33}+\frac{1}{39}+\frac{1}{22}+\frac{1}{26}\right)=\frac{180}{143}.$$

9/33	9/39	72/143
9/22	9/26	108/143
15/22	15/26	180/143

tabel 4

Bij deze, en soortgelijke, verschilmaten maakt het niet uit of je kijkt naar de verschillen tussen jongens en meisjes (man en vrouw), of dat je let op het verschil in samenstelling van de A en B groepen. Het verschil is *symmetrisch*. Rijen en kolommen zijn verwisselbaar.

Nadeel van χ^2 als verschilmaat is dat de waarde niet alleen afhangt van de verhoudingen in de oorspronkelijke tabel, maar ook van de grootte van de getallen. Als we alle getallen verdubbelen, verdubbelt χ^2 ook.
Als het gaat om een steekproef is de omvang ook wel degelijk van belang. Een steekproef met $N = 1000$ geeft andere informatie dan een steekproef met $N = 10$. In ons voorbeeld gaat het echter niet om een steekproef op basis waarvan conclusies over een veel grotere populatie getrokken moeten worden. We bekijken de situatie op zich. Hier zouden alleen de verhoudingen tussen de getallen een rol mogen spelen, en niet de grootte van de getallen zelf.

Als we χ^2 delen door het totaal aantal waarnemingen (in ons voorbeeld: 120), dan krijgen we phi-kwadraat:

$$\phi^2 = \frac{\frac{9}{33}+\frac{9}{39}+\frac{9}{22}+\frac{9}{26}}{120} = \frac{3}{286} \approx 0{,}01$$

Deze waarde verandert niet als we alle getallen met dezelfde factor vermenigvuldigen. ϕ is nu gelijk aan de (positieve of negatieve) wortel uit χ^2. In dit geval bij benadering - 0,102. Het minteken wijst er op dat mannelijke leerlingen in verhouding minder wiskunde A kiezen dan vrouwelijke, of meer algemeen geformuleerd dat de getallen op de hoofddiagonaal kleiner zijn dan in de bijbehorende verhoudingstabel.

Het kan eenvoudiger

De berekening van ϕ kan aanmerkelijk eenvoudiger dan hierboven is gedaan. Ik laat dat zien voor het algemene geval van een 2 x 2 kruistabel. In navolging van formule (1) gebruiken we voor de getallen in de 2 x 2–tabel de letters *a* t/m *d*. Het is handig om voor de marginalen ook letters te reserveren We kiezen voor *t*, *u*, *v* en *w*.

Het totaal $a + b + c + d$ $(= t + u = v + w)$ geven we aan met de letter N, zie tabel 5. In tabel 6 staat de bijbehorende verhoudingstabel.

a	*b*	*t*
c	*d*	*u*
v	*w*	*N*

tabel 5

e	*f*	*t*
g	*h*	*u*
v	*w*	*N*

tabel 6

Tussen de variabelen die daar staan bestaan allerlei betrekkingen. We zullen de volgende veel gebruiken:

$$\frac{e}{g}=\frac{f}{h} \leftrightarrow eh=fg \qquad (1)$$

$$\frac{e}{v}=\frac{t}{N} \leftrightarrow eN=tv \leftrightarrow e=\frac{tv}{N} \qquad (2)$$

Als we schrijven $a = e + \delta$, moet gezien de onveranderde marginalen gelden:
$b = f - \delta$, $c = g - \delta$, $h = e + \delta$ (3)

Het kwadraat van δ noemen we k:
$k = \delta^2$ (4)

Nu kunnen we schrijven, zie ook tabel 7:

$$\chi^2 = \frac{k}{e}+\frac{k}{f}+\frac{k}{a}+\frac{k}{h}=(\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{a}+\frac{1}{h})k=((\frac{1}{e}+\frac{1}{h})+(\frac{1}{f}+\frac{1}{a}))k=$$

$$=(\frac{e+h}{eh}+\frac{f+g}{fg})k\overset{(1)}{=}(\frac{e+h}{eh}+\frac{f+g}{eh})k=(\frac{e+h+f+g}{eh})k=\frac{Nk}{eh}=\frac{Nk}{fg}$$

k/e	k/f	
k/g	k/h	
		χ^2

tabel 7

Delen door N geeft de volgende korte formule (2) voor phi-kwadraat:

$$\phi^2 = \frac{k}{eh} \quad \left[=\frac{k}{fg}\right]$$

Nadeel van formule (2) is dat de bijbehorende verhoudingstabel bekend moet zijn. We gaan proberen om een eenvoudige formule te vinden voor ϕ^2 op basis van uitsluitend de gegevens van tabel 5.

We weten dat $e=\frac{tv}{N}$ (zie (2)), en analoog $h=\frac{uw}{N}$.

Hieruit volgt:

$$eh=\frac{tuvw}{N^2} \qquad (5)$$

Verrassender is misschien het verband tussen k (= δ^2) en het 'kruisproduct' $ad - bc$. Als we weer schrijven $a = e + \delta$; $b = e - \delta$ etc. krijgen we:
$ad - bc = (e + \delta)(h + \delta) - (f - \delta)(g - \delta) =$
$eh + e\delta + h\delta + \delta^2 - (fg - f\delta - g\delta + \delta^2) =$
$e\delta + f\delta + g\delta + h\delta = (e + f + g + h)\delta = N\delta$.
Immers $eh - fg = 0$ in een verhoudingstabel.
Hieruit volgt:

$(N\delta)^2 = (ad - bc)^2$,
en dus δ^2 (= k) = $\dfrac{(ad-bc)^2}{N^2}$ (6)

Dit levert ons formule (3):

$$\phi^2 = \frac{(ad-bc)^2/N^2}{tuvw/N^2} = \frac{(ad-bc)^2}{tuvw}$$

Voor ϕ geeft dit $\dfrac{|ad-bc|}{\sqrt{tuvw}}$, maar het heeft voordelen ook negatieve uitkomsten mogelijk te maken, en dus wordt formule (4): $\phi = \dfrac{ad-bc}{\sqrt{tuvw}}$.

Dat formule (4) gelijkwaardig is aan formule (1) is met tabel 5 eenvoudig in te zien.

De kleinste waarde van ϕ^2 is 0, de grootste waarde krijg je wanneer a en d óf b en c gelijk zijn aan nul. In het laatste geval geldt: $t = v = a$ en $w = u = d$, zie tabel 8.

a	*0*	*t*
0	*D*	*u*
v	*W*	*N*

tabel 8

Er geldt dan: $\phi = \dfrac{ad}{\sqrt{adad}} = \dfrac{ad}{\sqrt{(ad)^2}} \overset{a,d>0}{=} \dfrac{ad}{ad} = 1$.

Als a en d nul zijn geldt: $\phi = \dfrac{-bc}{\sqrt{bcbc}} = \dfrac{-bc}{bc} = -1$.

Deze eigenschappen doen wellicht denken aan die van de correlatiecoëfficiënt r tussen twee variabelen. En inderdaad we kunnen bij een 2 x 2 tabel ϕ opvatten als een correlatie, dit laten we verder even liggen.

Grotere tabellen

Tot nu toe is steeds uitgegaan van de 2 x 2 tabel, maar de formule $\phi^2 = \dfrac{\chi^2}{N}$ is ook te gebruiken voor grotere tabellen. Beschouw een 4 x 3 tabel, met de bijbehorende verhoudingstabel en verschiltabel, zie respectievelijk tabel 9, 10 en 11.

6	5	13	24
11	8	17	36
4	14	12	30
2	19	27	48
23	46	69	138

tabel 9

4	8	12	24
6	12	18	36
5	10	15	30
8	16	24	48
23	46	69	138

tabel 10

2	-3	1	0
5	-4	-1	0
-1	4	-3	0
-6	3	3	0
0	0	0	0

tabel 11

Bij een 2 x 2 verschiltabel liggen alle waarden vast als één cel bekend is, hier zijn (3 - 1) x (4 - 1) = 6 waarden nodig. Uiteraard zijn alle marginalen gelijk aan 0.
χ^2 kan nu berekend worden door de getallen in tabel 11 te kwadrateren en te delen door het getal in de overeenkomstige cel van tabel 10.

$$\chi^2 = \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{9}{24} \approx 15{,}6$$

$\phi^2 = \dfrac{\chi^2}{N}$ geeft dan $\phi^2 \approx \dfrac{15{,}6}{138} \approx 0{,}11$

Evenals in het 2 x 2 geval is het ook mogelijk om ϕ^2 te berekenen door alleen de getallen in tabel 9 te gebruiken. Het is met de hand iets meer werk, maar de procedure is vrij eenvoudig. Tabel 11 ontstaat uit tabel 9 door het kwadraat van elke cel te delen door het product van de bijbehorende rij- en kolomtotalen: $\dfrac{6 \times 6}{24 \times 23} = \dfrac{3}{46}$ enz. enz.
De som van alle cellen in deze tabel is ongeveer gelijk aan 1,11 en precies 1 meer dan ϕ^2.

$\frac{3}{46}$	$\frac{25}{1104}$	$\frac{169}{1656}$	
$\frac{121}{828}$			
		$\frac{81}{368}$	
			1,11

tabel 12

Om dat laatste te laten zien gebruiken we een variant op de eerder gebruikte notatie:
$a_{i,j}$: waarde van een cel in de oorspronkelijke tabel
$e_{i,j}$: waarde van de overeenkomstige cel in de verhoudingstabel
t_i : rijtotaal dat bij deze cel hoort

v_j : kolomtotaal dat bij deze cel hoort
N : totaal van alle cellen $a_{i,j}$
Zie figuur 2.

	$a_{i,j}$	...	t_i
	...	...	...
	v_j	...	N

figuur 2

Gemakshalve laten we de indices weg, en noteren dus $a_{i,j}$ als a. Met Σ bedoelen we de som over alle cellen van de tabel (exclusief de marginalen). We kunnen nu schrijven

$$\chi^2 = \sum \frac{(a-e)^2}{e} \text{ en dus}$$

$$\phi^2 = \frac{1}{N} \sum \frac{(a-e)^2}{e} = \sum \frac{(a-e)^2}{Ne} \qquad (7)$$

Vergelijking (7) is verder te herleiden tot:

$$\phi^2 = \sum \frac{a^2 - 2ae + e^2}{Ne} = \sum \frac{a^2}{Ne} + \sum \frac{-2ae + e^2}{Ne} = \sum \frac{a^2}{Ne} + \sum \frac{-2a + e}{N} =$$

$$\sum \frac{a^2}{Ne} - \frac{1}{N} \sum 2a + \frac{1}{N} \sum e = \sum \frac{a^2}{Ne} - \frac{2N}{N} + \frac{N}{N} = \sum \frac{a^2}{Ne} - 1$$

We gebruiken hierboven dat de som van alle a's (en van alle e's) gelijk is aan N. Nu is Ne, zoals we eerder zagen in (2) gelijk aan tv,
zodat we als formule (5) krijgen: $\phi^2 = \sum \frac{a^2}{tv} - 1$.

Bij een verhoudingstabel krijgen we voor χ^2 en dus ook voor ϕ^2 weer de waarde 0. Helaas is de maximale waarde van ϕ^2 afhankelijk van het aantal rijen of kolommen.
Om hier meer zicht op te krijgen kijken we naar een 4 x 4 tabel waar de rijtotalen gelijk zijn aan de kolomtotalen. In tabel 13 zijn de verschillen (tussen de rijen of kolommen) maximaal.

10				10
		20		20
	30			30
			40	40
10	30	20	40	100

tabel 13

In dit geval krijgt de breuk $\frac{a^2}{tv}$ steeds de waarde 1, en geeft formule (5) dus de uitkomst 4 × 1 – 1 = 3. In het algemeen geldt bij een vierkante tabel dat de maximale waarde van ϕ^2 gelijk is aan het aantal rijen minus 1.

Bij een niet vierkante tabel moet gekeken worden naar het grootste vierkant dat in de rechthoek past.
Omdat de maximale uitkomst van ϕ^2 afhangt van de omvang van de tabel, wordt daarvoor vaak gecorrigeerd volgens formule (6):

$$V^2 = \frac{\phi^2}{\min(R,K) - 1}$$

V wordt Craméřs V genoemd, naar de Zweedse wiskundige Harald Cramér (1893-1985). Met R en K wordt hier het aantal rijen en kolommen aangeduid. Vaak gaat het om het vergelijken van (niet meer dan) twee groepen. In dat geval is het minimum van R en K gelijk aan 2 en is V^2 gelijk aan ϕ^2.

Bij maximaal verschil tussen twee groepen is ϕ^2 ook bij een 2 x n tabel (met $n > 2$) gelijk aan 1, maar realisatie hiervan is niet altijd mogelijk, zie tabel 14. Bij elke verdeling zullen beide groepen ten minste één van de categorieën moeten delen.

	I	*II*	
A			10
B			20
C			30
D			40
	25	75	100

tabel 14

	I	*II*	
A	a		a
B		b	b
C	c		c
D		d	d
	$a+c$	$b+d$	0

tabel 15

In tabel 15 is een verdeling, waarbij beide groepen geen enkele categorie delen, wél mogelijk. Met behulp van formule (5) zien we dat

$$\phi^2 = \frac{a^2}{a(a+c)} + \frac{b^2}{b(b+d)} + \frac{c^2}{c(a+c)} + \frac{d^2}{d(b+d)} - 1 =$$

$$\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+d} + \frac{c}{a+c} + \frac{d}{b+d} - 1 = \frac{a+c}{a+c} + \frac{b+d}{b+d} - 1 = 2 - 1 = 1$$

Als de marginalen voldoende ruimte bieden is een verdeling mogelijk met een maximaal verschil tussen beide groepen, en dit levert een van $\phi^2 = 1$ op.
In lijn met formule (5) zou je ϕ in dit geval de waarde +1 kunnen toekennen.
Voor het verschil tussen twee groepen zijn trouwens eenvoudigere maten voorhanden, die niet werken met kwadraten, maar uitsluitend met absolute verschillen tussen de proporties (of percentages). Misschien meer daarover in een andere bijdrage.

Over de auteur

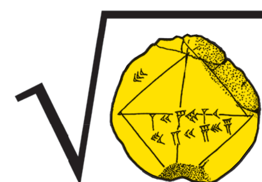
Gerard Koolstra houdt zich, na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *gerardk@xs4all.nl*

WORTELS VAN DE WISKUNDE

10: DERDEGRAADS VERGELIJKINGEN

Jeanine Daems

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: derdegraads vergelijkingen oplossen op de manier van Omar Khayyam.



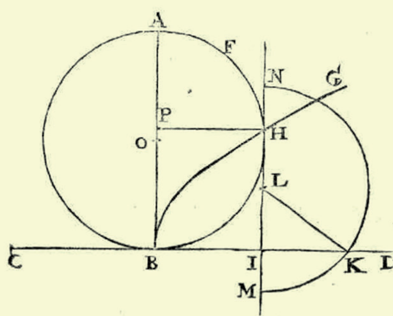
Andere Werckingh.

Al-waer de waerde des 1 (1) door Kegel-sneden ghevonden ende ghetoont wordt.

'T ghegeven: Laet daer toe zijn een Teerling-verghelyckingh daer 1 (3) + 36 (1) ghelyck is 305. *'Tbegheerde:* Wy moeten een rechte linie thoonen, die de waerde des 1 (1) voldoet.

'T WERCK.

Treckt eerstelyck twee rechte linien, als AB ende CD, die malckanderen recht-hoeckigh ontmoeten in C. alsoo dat den hoeck ABC sy recht: daer van soo stelt BC ghelyck den □ wortel uyt het (1) ghetall, als 6. Daer nae soo deelt het ledighe 305, door 36 het (1) ghetall, comt $8\frac{17}{36}$. of $8\frac{47}{100}$ nae ghenoech. Het selvighe stelt voor BA. Beschrijft nu op den gantschen middel-lijn AB, het rondt AFHB. van ghelycken oock beschrijft uyt het punt B. op den as BD. den Brander ofte *Parabole* BHG *recto latere* BC 6. welcken treck der Brandt-linie den ommetreck des rondts comt te door-snijden in H. van daer laet vallen op CD. de hangende HI. Ick segghe dat HI bethoont de waerde des 1 (1) vande selfde verghelyckingh.



figuur 1 Uit *Algebra* (1639)

deze methode naast de meer gebruikelijke aanpak van Cardano. De ondertitel van zijn boek zegt overigens: *Waer door alles ghevonden wordt in de wis-konst, wat vindtbaer is. Noyt vor desen bekendt.* Hij claimt hier dus dat zijn methodes nieuw zijn!

Laten we eens kijken wat er gebeurt, het is voor het vervolg niet nodig de bron in detail te bekijken. Kijk wel even naar de vraagstelling en naar het plaatje in figuur 1. Deze bron is alleen al leuk vanwege de taal en de notatie. Stampioen gebruikt hier notatie met rondjes om onbekenden aan te geven: met

1 (3) + 36 (1) ghelyck is 305

bedoelt hij de vergelijking $x^3 + 36x = 305$. Dus een 3 in een rondje betekent de derde macht van de onbekende, een 1 in een rondje de eerste macht. Je ziet al wel dat deze notatie vooral geschikt is als we met slechts één variabele van doen hebben.

Ook het woord *Teerling-verghelyckingh* is mooi: een teerling is een derde macht. (Denk ook maar aan de uitdrukking 'de teerling is geworpen!' Dat gaat gewoon over een dobbelsteen, een kubus dus.)

Maar goed, wat doet Stampioen hier? Aan het plaatje zien we dat hij een bepaalde cirkel snijdt met een parabool, en zo een lijnstuk vindt waarvan hij beweert dat die aan de vergelijking voldoet.

Derdegraads vergelijkingen

Het verhaal van de algemene oplossing van de derdegraads vergelijking, de formule van Cardano, is tamelijk bekend: vol van ruzie tussen onder anderen Cardano en Tartaglia in het zestiende-eeuwse Italië. Als je daar meer over wilt lezen, kun je dat bijvoorbeeld doen in schets 11 van *Wortels van de wiskunde*.[1]

Maar voor die algemene, algebraïsche formule gevonden was, waren er ook andere wiskundigen die werkten aan het oplossen van derdegraads vergelijkingen. Een aanpak vinden we bijvoorbeeld in het boek *Algebra*[2] uit 1639, van de Nederlandse wiskundige Stampioen. Hij geeft

Omar Khayyam

De bewering van Stampioen dat hij deze methode zelf heeft bedacht, is echter niet waar: deze methode komt uit het werk van de Perzische wiskundige, sterrenkundige en dichter Omar Khayyam (1048 - 1131).

Hij gebruikt inderdaad snijpunten van kegelsneden om oplossingen te bepalen van derdegraads vergelijkingen. Wat bijzonder is, is dus dat zijn oplossing puur meetkundig is: hij vindt inderdaad een lijnstukje met de juiste lengte, maar niet een exacte uitdrukking voor de lengte van dat lijnstukje. Dat was voor hem wel een soort

minderwaardige oplossing, hij had liever een algebraïsche oplossing gehad die ook daadwerkelijk een getal oplevert. Hij zegt dan ook: 'Als, echter, het doel van het probleem een echt getal is, dan zijn wij, noch alle anderen die zich met algebra bezighouden, in staat geweest om deze vergelijking op te lossen - misschien zullen anderen die na ons komen deze lacune kunnen vullen.[3]

Het leuke voor in de klas is dat dit een bron is die zeer geschikt is om met analytische meetkunde aan te pakken, al deed Khayyam dat zelf natuurlijk nog niet echt. Omar Khayyam kende nog geen negatieve getallen, wat ertoe leidde dat er voor hem een heleboel verschillende derdegraads vergelijkingen bestonden, want hij gebruikte tenslotte alleen positieve coëfficiënten. Hij probeerde een systematische aanpak te geven: per type vergelijking beschreef hij de kegelsneden waarvan de snijpunten tot een oplossing leidden, en ook wanneer er geen, één of twee oplossingen uit zouden komen. We bekijken hieronder het eenvoudigste geval, waarbij de oplossing het snijpunt is van een cirkel en een parabool.

'DE TEERLING IS GEWORPEN! EEN TEERLING IS EEN DERDE MACHT. DAT GAAT GEWOON OVER EEN DOBBELSTEEN, EEN KUBUS DUS.'

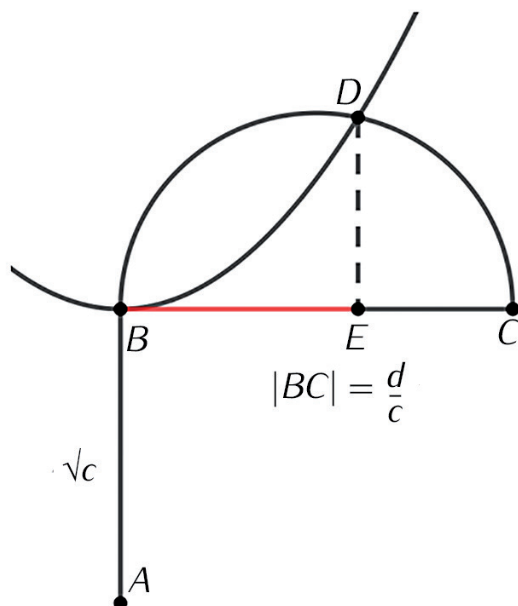
Vergelijking $x^3 + cx = d$

We bekijken de vergelijking die wij zouden noteren als: $x^3 + cx = d$, waarbij c en d dus positieve getallen zijn. Khayyam zou deze vergelijking omschrijven als: 'een kubus en zijden zijn gelijk aan een getal'. Hieruit blijkt al dat hij wel probeerde een algemene oplossing te geven en niet alleen een voorbeeld bedoelde.

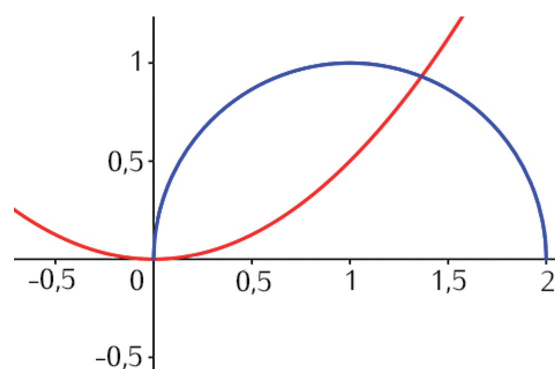
Wat Khayyam doet is het volgende: hij neemt een lijnstuk AB met als lengte de zijde van een vierkant met oppervlakte c, oftewel: de lengte van AB is $\sqrt{c}$. Hij tekende vervolgens lijnstuk BC loodrecht op AB zodanig dat $BC \cdot AB^2 = d$, wat neerkomt op $BC = d/c$. Daarna verlengt hij AB en construeert hij een parabool met het verlengde van AB als symmetrieas, waarvan zijn beschrijving in moderne termen neerkomt op de vergelijking $x^2 = \sqrt{c} \cdot y$. (Hierbij hebben we de oorsprong in B gekozen en de x-as langs BC.) Vervolgens construeerde hij een halve cirkel met middellijn BC. Die halve cirkel en de parabool snijden naast de oorsprong ook in een punt D, en de x-coördinaat van dat punt blijkt de oplossing van de vergelijking te zijn. De lengte van BE is dus de oplossing.

Khayyam had nog geen coördinatenstelsel of vergelijkingen, dus zijn beschrijvingen waren wat anders van aard. Zijn beschrijvingen van de parabool (en bij de andere gevallen ook andere kegelsneden) sluiten aan bij de manier waarop zijn voorgangers, zoals de Griek Apollonius erover schreven. (Wie meer wil weten over kegelsneden in de Griekse oudheid, zie een artikel op de site van Jan Hogendijk.[4])

In figuur 3 zijn $c = 4$ en $d = 8$ genomen, dus dat hoort bij de vergelijking $x^3 + 4x = 8$.



figuur 2



figuur 3

Hier kun je natuurlijk allerlei interessante vragen bij stellen. Klopt dit wel? Waarom klopt dit eigenlijk? Hoe komt hij aan dit idee?
Een eerste stap om in te zien dat wat Khayyam doet inderdaad wel klopt, is de hele boel te vertalen naar

moderne beschrijvingen in een coördinatenstelsel (omdat de oude beschrijving begrijpen volgens mij niet zo nuttig is voor de moderne leerling). Die van de parabool is hier al gegeven, die van de cirkel zouden de leerlingen zelf kunnen opstellen. De straal moet $\frac{d}{2c}$ zijn en het middelpunt ($\frac{d}{2c}$, 0), dus de vergelijking van de hele cirkel wordt dan:
$(x-\frac{d}{2c})^2+y^2=\frac{d^2}{4c^2}$.

Andersom kan ook, je geeft bijvoorbeeld de vergelijking

$x(\frac{d}{c}-x)=y^2$, en de leerling moeten dan uitvogelen

waarom dat de vergelijking van een cirkel is met het juiste middelpunt ($\frac{d}{2c}$, 0) en de juiste straal $\frac{d}{2c}$. Dat kan met

kwadraat afsplitsen en geeft wat oefening in algebraïsche vaardigheden.
Als dat wat veel van het abstractievermogen vraagt, kun je er natuurlijk ook voor kiezen met de vaste c en d aan de slag te gaan en het eerst maar eens voor dat concrete geval uit te laten zoeken.
Als we bijvoorbeeld $c = 4$ en $d = 8$ kiezen, worden de

vergelijkingen in kwestie: $y=\frac{1}{2}x^2$ en $y=\sqrt{x(2-x)}$.

Deze functies kun je gewoon tekenen op de GR, het snijpunt bepalen geeft $x \approx 1{,}3646556$. Dat invullen in x^3+4x geeft inderdaad 8.
Om algebraïsch te controleren of dit snijpunt inderdaad een oplossing geeft, moet je dus controleren dat voor deze x inderdaad geldt dat $x^3+4x=8$ De x die we gevonden hebben voldoet aan twee vergelijkingen:

$y=\frac{1}{2}x^2$ en $y=\sqrt{x(2-x)}$. Deze aan elkaar gelijkstellen

levert: $\frac{1}{2}x^2=\sqrt{x(2-x)}$. Kwadrateren aan beide kanten

geeft $\frac{1}{4}x^4=x(2-x)$. Het lijkt alsof we nu verder van

huis zijn, want dit is een vierdegraads vergelijking. Maar elke term heeft een factor x, zien we na uitschrijven: $\frac{1}{4}x^4+x^2-2x=0$. We kunnen x buiten haakjes halen, en omdat x sowieso ongelijk aan 0 is (dan vinden we het verkeerde snijpunt, namelijk dat in de oorsprong) kunnen we concluderen dat voor onze x geldt: $\frac{1}{4}x^3+x-2=0$, oftewel: $x^3+4x=8$.

Dit hele verhaal kan ook algemeen: het snijpunt van

$x^2=\sqrt{c}\cdot y$ en $y^2=x(\frac{d}{c}-x)$ geeft op dezelfde manier

$\frac{x^4}{c}=x(\frac{d}{c}-x)$, oftewel: $x^4+cx^2-dx=0$ en omdat

$x = 0$ niet de oplossing is waar het hier over gaat kunnen we x wegdelen en volgt inderdaad dat $x^3+cx=d$.

Andere gevallen
In andere gevallen heeft Omar Khayyam soortgelijke aanpakken. De vergelijking $x^3+c=bx$ lost hij bijvoorbeeld op door het snijpunt te bepalen van de parabool $x^2=\sqrt{b}\cdot y$ en de hyperbool $y^2=x^2-\frac{c}{b}x$.
Hier kun je dezelfde vragen bij stellen als bij het eerste voorbeeld, je kunt op dezelfde manier laten zien dat dat inderdaad klopt. Maar je kunt ook ingaan op vragen als: hoe zie je nou aan de vergelijking in het eerste voorbeeld dat het om een cirkel gaat, en in het tweede voorbeeld om een hyperbool?

Bronnen
De bronnen zelf zijn in dit geval wat lastig te lezen voor leerlingen, vooral omdat Khayyams beschrijvingen van de kegelsneden niet de manier zijn waarop de moderne lezer daarnaar kijkt. Wie daar wel in geïnteresseerd is, kan een Engelse vertaling vinden in Katz.[3] We kijken nog even terug naar het voorbeeld van Stampioen, de vergelijking $x^3+36x=305$. Een leuke vraag kan nu zijn: zie je in het plaatje van Stampioen dezelfde figuren als in de aanpak van Khayyam? Hoe ziet jouw plaatje eruit als je het op de manier van hierboven tekent op je GR? Waar zit in Stampioens plaatje het lijnstuk dat de oplossing is?
Wat ik leuk vind aan deze methode is dat je ziet dat oude wiskundigen creatief omgingen met hun problemen. Algebraïsch lukte het nog niet, maar meetkundig kwam Khayyam er met de theorieën van de kegelsneden wel uit, al was dat niet het soort oplossing dat hij graag wilde.

Literatuur

[1] Berlinghoff, W.P. & Gouvêa, F.O. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon.
[2] Stampioen, Johan d'Jonghe (1639). *Algebra ofte nieuwe stel-regel waer door alles gevonden wordt in de wis-kunst, wat vindtbaer is. Den Haag:* 'ghedruckt ten huyse van de Autheur in sphaera mundi'.
[3] Vertaald uit: Katz, V. (Ed.) (2007). *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A sourcebook*. Princeton: Princeton University Press, blz. 556 e.v.
[4] Hogendijk, J. (1995). Kegelsneden in de Griekse oudheid. In: A. Grootendorst (Ed.) *Vakantiecursus kegelsneden en kwadratische vormen*, CWI Syllabus no. 40. Amsterdam: Centrum voor Wiskunde en Informatica. Artikel is te downloaden op *http://www.jphogendijk.nl/publ.html*

Over de auteur

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding op de HU, op de Universiteit Utrecht en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: *jeanine.daems@hu.nl*

IMPLEMENTATIE VAN HET VERNIEUWDE HAVO STATISTIEKCURRICULUM

Hester Vogels

In dit artikel gaat Hester Vogels op zoek naar een aanpak van het statistiek-onderwijs die recht doet aan de aanbevelingen in het cTWO eindrapport.

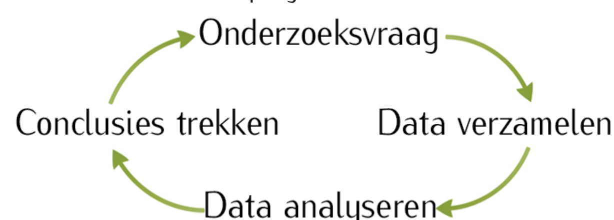
Statistisch redeneren

In het voorgaande havo wiskunde A-curriculum was statistiek een klein SE-onderwerp. Leerlingen berekenden centrum- en spreidingsmaten en leerden bijvoorbeeld om een boxplot of histogram te tekenen. We besteedden expliciete aandacht aan even of oneven aantallen bij het bepalen van de mediaan en het zetten van de punten boven de rechtergrens bij een cumulatieve frequentie-polygoon.

Al twintig jaar terug ontstond er een internationale beweging die pleitte voor een andere benadering in het statistiekonderwijs. De focus zou meer moeten liggen op *data and concepts* en minder op *recipes and derivations*.[1] Leerlingen komen terecht in een maatschappij waarin ze in toenemende mate geconfronteerd worden met kwantitatieve informatie. Voortdurend worden in het nieuws, in advertenties en in de politiek onderzoeksresultaten geciteerd en conclusies getrokken en dat gebeurt niet altijd op een correcte manier. Burgers moeten in staat zijn om deze informatie te begrijpen en beoordelen en rekenwerk kan steeds meer aan technologie worden overgelaten. Het statistiek-onderwijs moet zich daarom richten op het begrijpen van de verschillende kernconcepten en statistisch redeneren in plaats van op procedures en berekeningen.

Empirische cyclus

Bij havo wiskunde A neemt statistiek sinds 2015 een aanzienlijk deel van het examenprogramma in en wordt ook op het Centraal Examen getoetst. Volgens het eindrapport van cTWO[2] wordt statistiek op een meer realistische manier benaderd dan voorheen. Uitgangspunt daarbij is de empirische cyclus van data verzamelen, data analyseren en conclusies trekken. Ict wordt gebruikt om grote datasets te analyseren. In het visiedocument[3] gaf cTWO aan dat 'een intern-wiskundig samenhangend netwerk van concepten centraal staat'. Dat streven naar samenhang is cruciaal.[4] Met een samenhangend netwerk van concepten zijn leerlingen beter in staat hun kennis toe te passen in nieuwe situaties en aan te vullen met nieuwe kennis die ze opdoen in de maatschappij of in het vervolgonderwijs. Eén van de manieren om samenhang in het statistiekcurriculum te bevorderen is het aanleren van concepten binnen de statistische onderzoekscyclus, zie figuur 1. Leerlingen doorlopen die cyclus verschillende keren en koppelen dan de onderzoeksactiviteiten aan de benodigde statistiekkennis. Een andere manier is het curriculum op te bouwen rond twee basisvragen die door middel van statistiek beantwoord kunnen worden: is er een verband of is er een verschil? In elk geval vraagt het vernieuwde statistiekprogramma om een nieuwe didactiek.



figuur 1 De onderzoekscyclus

Knelpunten

Vooraf is er een aantal zorgen geuit over de implementatie van deze vernieuwde benadering van statistiek. In het eindrapport van cTWO[2] werd een aantal knelpunten genoemd: de beschikbaarheid van ict-faciliteiten op scholen, het ontwerp van geschikte computerpracticum-toetsen en het onderwijs en de toetsing van de onderzoekscyclus (opzet en uitvoering van een statistisch onderzoek). Verschut en Bakker[5] kwamen tot de conclusie dat docenten gedurende de pilots wel de intentie van het nieuwe curriculum begrepen, maar dat het hen niet lukte die onderliggende visie in het klaslokaal tot uiting te brengen. Ze misten de rode lijn in het concept lesmateriaal en gaven aan hulp nodig te hebben bij het ontwerpen van geschikte lesactiviteiten die samenhangende kennis bevorderen.

Onderzoek

Inmiddels zijn we vijf jaar verder en zijn de vernieuwde curricula landelijk ingevoerd. Ik vroeg me daarom af: hoe ervaren leraren de implementatie van het vernieuwde havo statistiekcurriculum? Om die vraag te beantwoorden nam ik in het kader van mijn afstudeeronderzoek 21 diepte-interviews af bij leraren die lesgeven aan havo 4 en/of havo 5. Ik vroeg ze naar hun interpretatie van het vernieuwde curriculum, in welke mate ze zich voorbereid voelden of hebben voorbereid, welke materialen en lesactiviteiten ze gebruiken, welke zorgen ze hebben en welke ondersteuning ze nog kunnen gebruiken. De interviews vonden plaats in het schooljaar 2016-2017; het eerste vernieuwde eindexamen had dus nog niet plaatsgevonden.

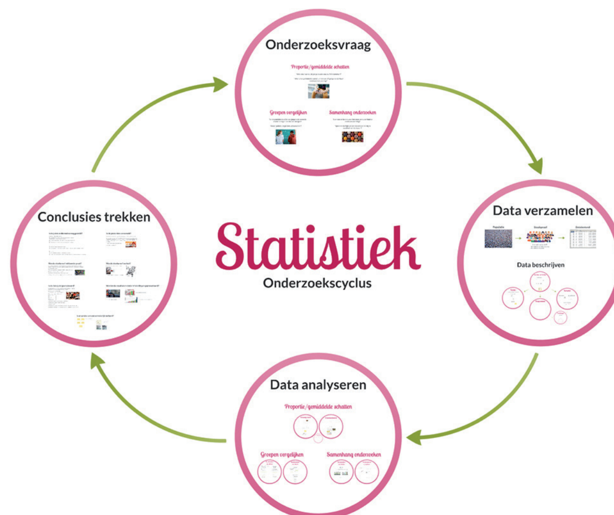
Resultaten

De resultaten laten zien dat de implementatie van het vernieuwde statistiekcurriculum om aandacht vraagt. Belangrijke onderdelen lijken verloren te gaan, zoals de focus op statistisch begrip en het construeren van een samenhangend netwerk van statistische concepten.
Leraren weten waarom ze statistiek onderwijzen. Ze begrijpen het groeiende belang van statistiek. Niet alle leraren lijken echter het doel van het vernieuwde statistiekcurriculum te begrijpen: de focus op statistisch begrip, in plaats van op het tekenen van diagrammen en het doen van berekeningen. Ze zien de onderzoekscyclus als een bijkomstigheid, niet als het belangrijkste onderdeel van het curriculum. Zonder dit conceptuele raamwerk, zal het lastiger zijn voor leerlingen om hun kennis in nieuwe situaties te gebruiken[4]. Sommige leraren lijken deze discrepantie te ervaren, omdat het doen van berekeningen met het formuleblad niet als wiskunde voor ze voelt.
Ze willen dat leerlingen de achtergrond van de formules begrijpen, maar ze weten niet hoe ze dat aan moeten pakken. Het kan zijn dat de gekozen concepten, zoals de betrouwbaarheidsintervallen en de φ-coëfficiënt, te lastig zijn om statistisch begrip te bevorderen bij de leerlingen. Maar het lijkt er ook op dat veel van de leraren geen ervaring hebben met het doen van onderzoek en het gebruiken van de onderzoekscyclus. Hun eigen gebrek aan kennis en ervaring met het werken met statistische concepten weerhoudt hen van het voortbouwen op het begrip van leerlingen. Leraren zouden deze ervaring kunnen opdoen tijdens de lerarenopleiding, door een klein onderzoeksproject te doen, waarbij statistici achtergrondinformatie geven over de statistische concepten.
Om leraren te ondersteunen bij het ontwerpen van lesactiviteiten en praktische opdrachten, zouden *good practices* van leraren landelijk verspreid moeten worden. Uitgevers hebben een grote invloed, aangezien voor veel leraren de lesmethode de belangrijkste bron van informatie is. Het lijkt erop dat de boeken niet voldoende in lijn zijn met de visie van cTWO. De boeken van *Getal & Ruimte* kunnen een oorzaak zijn van het feit dat de focus vaak nog steeds op mechanismen en recepten ligt, aangezien deze boeken met stappenplannen werken.
Zowel *Getal & Ruimte* als *Moderne Wiskunde* presenteren de onderzoekscyclus als een aparte paragraaf en niet als rode lijn tussen de verschillende statistische concepten. Een ander probleem is het ict-deel van het curriculum. Het lijkt erop dat leraren dit onderdeel erg verschillend interpreteren. De syllabus is vrij globaal over wat leerlingen zouden moeten kunnen, en het is geen onderdeel van het Centraal Examen. Veel scholen hebben onvoldoende mogelijkheid om met ict te werken. Tot slot voelt een deel van de participanten weerstand om met dit vernieuwde programma te werken, omdat statistiek zo anders is dan andere onderwerpen binnen de wiskunde. Dit kan een tweedeling in wiskundedocenten veroorzaken: zij die wel en zij die geen wiskunde A onderwijzen.

Voor mijn volledige scriptie verwijs ik naar de website van de *Euclides*. Daarin zijn interessante citaten van leraren te vinden, waaruit deze conclusies getrokken zijn.

Nieuwe aanpak in mijn eigen klas

Tijdens mijn afstudeeronderzoek kwam ik erachter dat de manier waarop ik mijn statistiekonderwijs inrichtte (hoofdzakelijk sommetjes maken uit *Getal & Ruimte*) niet overeenstemde met de visie van het vernieuwde statistiekcurriculum. Daarom besloot ik het met mijn nieuwe cohort leerlingen anders aan te pakken. Ik koos ervoor om de eerste twee perioden van havo 4 aan statistiek te besteden. In die twee perioden zouden ze de gehele onderzoekscyclus doorlopen en daarmee alle examenstof doorwerken. In havo 5 wordt vervolgens één periode aandacht besteed aan statistiek op het eindexamen.
Ik paste de Statistiek Prezi en uitlegvideo's op mijn website *Wiskunjeleren.nl* volledig aan en zorgde ervoor dat alle theorie onderverdeeld was in de verschillende fasen van de onderzoekscyclus, zie figuur 2.



figuur 2 Zie *wiskunjeleren.nl/portfolio-item/statistiek/*

Ik zocht samenwerking met een vakoverstijgend project dat de maatschappijvakken samen organiseren, met als thema verbondenheid in de wijken in Utrecht. De leerlingen werkten in groepjes en startten met het formuleren van een onderzoeksvraag over verbondenheid in één van de wijken in Utrecht. Vervolgens namen ze enquêtes af in die wijk en verwerkten de verzamelde data in *VUstat*. Ondertussen kwam alle stof over statistiek aan bod, via korte instructies in de les, via *Wiskunjeleren.nl* en via zelfgeschreven materiaal. Ze pasten die theorie direct toe op hun eigen onderzoek, waarmee de begrippen meteen tastbaar voor ze werden. Ze beschreven hun data, vergeleken groepen en zochten samenhang tussen verschillende variabelen. Hun bevindingen beschreven ze in een onderzoeksverslag, dat ze vlak voor de kerstvakantie inleverden en dat bijna de helft van hun cijfer voor wiskunde dit jaar vormt.
Ik organiseerde vijf feedbackmomenten waarbij leerlingen hun onderzoeksverslag inleverden en ik feedback gaf.

Ik kan terugblikken op een leerzame periode, zowel voor de leerlingen als voor mij. Een aantal dingen blijft mij bij:

- Statistiek leer je wat mij betreft niet op een andere manier dan door onderzoek te doen. Leerlingen dachten na over hun enquêtevragen, de manier waarop ze een steekproef namen, wat voor keuzes je maakt als een participant per ongeluk twee hokjes aankruist, als je een deel van de data verliest, welke variabelen zinnig zijn om met elkaar te vergelijken, et cetera. Ik heb hele mooie gesprekken gevoerd met leerlingen en het echt over statistiek gehad.
- Mijn rol als docent veranderde compleet. De focus verschoof van het voorbereiden van instructies naar het continu geven van feedback. Ik zag de leerlingen elke week groeien en kon uiteindelijk vertrouwen op goede eindresultaten.
- Ik zag dat leerlingen een grote mate van eigenaarschap ervoeren. Ik heb sommige leerlingen nooit eerder zo gemotiveerd gezien voor wiskunde. Het was hún onderzoek, dus ze wilden er iets moois van maken. Het feit dat ze continu feedback kregen, kan daaraan hebben bijgedragen.
- Leerlingen zochten voortdurend naar houvast. Deze opdracht was groot en complex, iets wat ze niet gewend waren uit de onderbouw. Sommige leerlingen gaven gedurende het proces aan 'liever gewoon sommen te maken uit het boek', maar zeiden achteraf hier wel meer van te hebben geleerd.
- Het beoordelen van onderzoeksverslagen omvat veel meer dan alleen wiskunde. Hoe schrijf je een goede inleiding, methode, discussie of conclusie? Ook een goede samenhang in de tekst en correcte opbouw van zinnen zijn onderdeel van een goed onderzoeksverslag. Juist die onderdelen zijn lastig voor leerlingen.
- Het was voor mij als docent erg zoeken naar hoe hoog de lat moest liggen. De leerlingen maken in feite een soort miniscripties, maar havo 4 staat heel ver af van een afstudeeronderzoek aan het hbo. Het stellen van een goede onderzoeksvraag, het kiezen van de juiste analyse-technieken, het trekken van conclusies... Het zullen zaken zijn die ook op het hbo als lastig worden ervaren. Hoe ver moeten zij daar nu al in zijn? Het feit dat deze vaardigheden geen onderdeel zijn van het Centraal Examen maakt het bepalen van de leerdoelen nog lastiger.

Wat statistiek betreft, zou ik zelf niet meer terug kunnen naar het werken uit een methode. Ik ben er inmiddels van overtuigd dat leerlingen veel meer begrip krijgen van de onderliggende statistische concepten door er zelf mee te werken gedurende een onderzoek, dan door er sommetjes over te maken. Hebben we het bijvoorbeeld over steekproeven, aselectheid en representativiteit, dan leerden mijn vorige cohort leerlingen de definities uit het hoofd, maar het had voor hen geen échte betekenis. Mijn huidige leerlingen dachten voor het uitvoeren van hun eigen onderzoek na over verschillende soorten steekproeven, de voor- en nadelen ervan en blikten achteraf terug op hun gekozen methode.
Of kijk naar het gebruik van het formuleblad: mijn vorige cohort leerlingen die met de methode werkten zochten bij elk sommetje de juiste formule en vulden de getallen in zonder na te denken waar het over gaat. Mijn huidige leerlingen kijken naar hun dataset en bedenken bijvoorbeeld: welke twee groepen zijn interessant om te vergelijken? Met welke soort variabele heb ik te maken? Welke formule kan ik daar dan bij gebruiken? En welke conclusie kan ik trekken bij de uitkomst, in de context van mijn onderzoek?

Wellicht heb ik jullie geïnspireerd met mijn ervaring. Ik hoop dat wij wiskundeleraren uiteindelijk onze weg kunnen vinden in het verzorgen van statistiekonderwijs, met daarbij de juiste lesmaterialen en de juiste ondersteuning. Ik pleit in elk geval voor meer uitwisseling tussen leraren over dit onderwerp.

Literatuur

[1] Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistical Review*, 65, 123-165.
[2] Siersma, D. (2013). *Denken en doen, wiskunde op havo en vwo per 2015. Eindrapport van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO.* Utrecht: Freudenthal Instituut.
[3] Siersma, D., & Drijvers, P. (2007). *Rijk aan betekenis, het visiedocument van cTWO in vogelvlucht.* Utrecht: Freudenthal Instituut.
[4] Verschut, A., & Bakker, A. (2012). Uit de ivoren toren: samenhangende kennis. Hoe bevorder je die bij statistiek en kansrekening? *Nieuwe Wiskrant, 31*(3), 32-28.
[5] Verschut, A., & Bakker, A. (2011). Implementing a more coherent statistics curriculum. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Ed.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 915-924). Rzeszów: University of Rzeszów.

Over de auteur

Hester Vogels was tot voor kort docent wiskunde bij UniC in Utrecht, nu bij de nieuwe school Academie TIEN in Utrecht. Ze is eigenaar van de website *Wiskunjeleren.nl* en beheerder van de Facebookgroep Leraar Wiskunde. Sinds dit schooljaar is zij bestuurslid bij de NVvW.
E-mailadres: *hvogels@nvvw.nl*

KLEINTJE DIDACTIEK

STATISTIEK: GEMIDDELDE EN VERDELING

Lonneke Boels

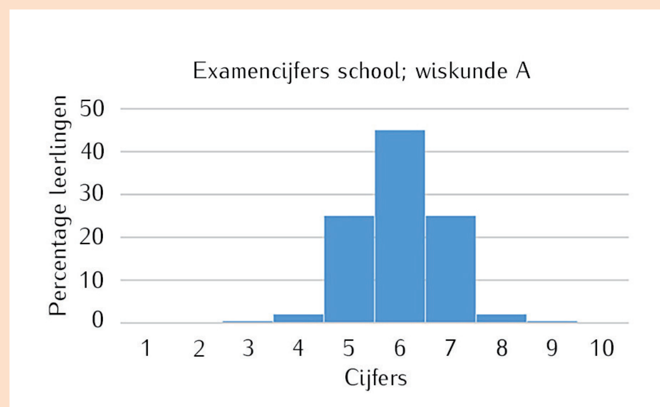
Stel je de volgende situatie voor: een school heeft hetzelfde gemiddelde cijfer voor een landelijk examen (wiskunde A bijvoorbeeld) als het landelijke gemiddelde, maar het slagingspercentage voor dat vak ligt op de school hoger dan het landelijk gemiddelde. Kan dat?

Het antwoord op deze vraag moet natuurlijk zijn: ja dat kan. Maar voor sommige leerlingen blijkt dit verwarrend. Dat komt omdat we in het ene geval spreken over een gemiddeld *cijfer*, en in het andere geval impliciet over een gemiddelde *verdeling*.

Voordat ik dat met een voorbeeld uitleg, moeten we eerst afspreken wat we bedoelen met 'slagingspercentage' voor een vak. Voor wiskunde moet je – vanwege de kernvakkenregeling – minimaal een vijf halen. Laten we dus spreken over een *fictief slagingspercentage* als leerlingen een vijf of hoger (afgerond) halen.[1] Omwille van de eenvoud werken we in de volgende voorbeelden alleen met afgeronde cijfers. Voor het principe maakt dit natuurlijk niets uit. Voor alle duidelijkheid: de voorbeelden zijn door mij bedacht – elke overeenkomst met een school of landelijk is puur toeval.

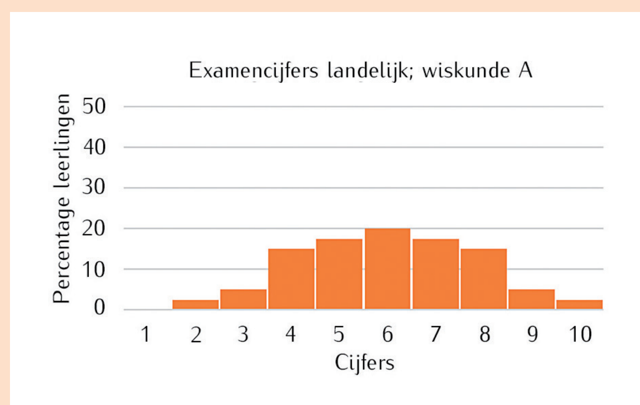
Voorbeelden

De school in het voorbeeld heeft een gemiddeld cijfer van 6,0. Uit de *verdeling* van deze cijfers blijkt dat 2,5% (5 van de 200 leerlingen) *fictief gezakt* is (of 95% *fictief geslaagd* zo je wilt), zie figuur 1.



figuur 1

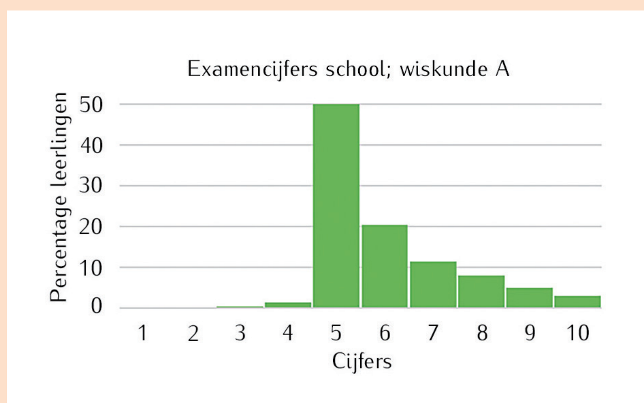
De landelijke cijfers zijn ook bedacht en komen eveneens precies op 6,0 gemiddeld uit. Wie alleen naar het gemiddelde kijkt, zou denken dat er geen verschil is met de school. De verdeling ziet er landelijk echter heel anders uit. Om misleiding te voorkomen, heb ik de schalen precies hetzelfde gemaakt. Landelijk is nu 22,5% *fictief gezakt* (of 77,5% fictief geslaagd, zo je wilt), zie figuur 2.



figuur 2

Normaal verdeeld en symmetrisch

Een tweede misverstand is dat verdelingen van cijfers meestal *normaal verdeeld,* of in elk geval *symmetrisch* zouden zijn. Voor de onderstaande – ook weer uit mijn geest ontsproten – school geldt dat de gemiddelde cijfers voor het wiskunde A eindexamen op 6,0 uitkomen.
Op deze school is de verdeling van de cijfers beslist niet symmetrisch, maar heel erg rechts scheef. Bij de onderstaande school is slechts 2% van de leerlingen fictief gezakt doordat ze een vier of lager scoren. Een fictief slagingspercentage van 98%, zie figuur 3. Echt blij zou ik hier als schooldirectie overigens niet van worden, omdat maar liefst 50% van de leerlingen alsnog op een ander kernvak zouden kunnen zakken.



figuur 3

Over dat rechts- en linksscheef nog iets anders. In sommige schoolboeken staat het structureel (bijvoorbeeld onderbouwboeken *Getal en Ruimte*, editie 2008) dan wel incidenteel (bijvoorbeeld *Mathplus* wiskunde A) onjuist. Als de staart aan de rechterkant zit, heet de verdeling rechtsscheef en niet anders.

Ik zou dit verhaal over verdelingen kunnen vervolgen met nog allerlei andere misverstanden die er over verdelingen bestaan zoals over de ligging van de mediaan ten opzichte van het gemiddelde (nee, kun je niets over zeggen als je weet dat de verdeling rechtsscheef is).
Of dat z-scores niet per se normaal verdeeld zijn. Maar dat komt in een volgende Kleintje Didactiek. Wie niet tot die tijd kan wachten, kan het boek van *Statistical Misconceptions* erop naslaan, van Schuyler W. Huck die niet alleen uitlegt wat onze denkfouten zijn, maar ook waarom dat dan erg is.

Noot

[1] Ik besef uiteraard dat een afgeronde vijf om allerlei redenen niet wenselijk is en zeker geen garantie op slagen; dat hangt mede van de cijfers van andere (kern)vakken en van het gemiddelde voor het CE af. Voor het punt dat ik hier wil maken, is dit echter niet relevant.

VASTGEROEST VAKANTIEWERK

Ab van der Roest

Onderdeel van de vakantie van veel leraren is achterstallige klussen wegwerken. Dit vakantiewerk levert soms mooie inzichten op die alles met de wiskundeles te maken hebben. Ik zal dit illustreren met het werk van Arnoud en Steef. Omdat ik een nieuwe keuken had gekocht, moesten er enkele aanpassingen worden gedaan. Dat deed Arnoud voor me. Tot mijn grote verbazing was zijn aanpak totaal anders dan verwacht. Arnoud begon eerst met kratjes, ladekastjes en dergelijke neer te zetten. Waarom? Nou verklaarde Arnoud, dan weet ik precies waar mijn gereedschap staat en grijp ik nooit mis. Het kost even tijd, maar die tijd win ik snel terug. Deze manier van werken projecteer ik sindsdien op het oplossen van wiskundige problemen. Wiskunde bestaat voor een deel uit gereedschappen die nodig zijn om problemen mee aan te pakken. Gereedschap als oplossen van vergelijkingen, differentiëren, integreren, meetkundige stellingen en ga zo maar door. Ik vertel mijn leerlingen dat dit vaardigheden zijn, die op zichzelf belangrijk zijn, maar veel belangrijker als gereedschap om een groter probleem op te lossen. Als je weet welk gereedschap je hebt, en waar het opgeslagen is, dan lukt het oplossen van die grotere problemen waarschijnlijk wel. Ik vertel er dan bij dat de leerlingen mijn gereedschapskist uit mijn schuur niet als voorbeeld moeten nemen. Daarin ligt alles kris kras door elkaar en ik verlies veel tijd met zoeken welk gereedschap ik nodig heb en waar het ligt.Voor veel leerlingen is dit een eyeopener die ze zelf niet bedacht zouden hebben, maar waar ze de relevantie van inzien. Geleerd van een klusjesman en toegepast door een wiskundedocent. Kan het mooier?
Steef kwam later aan bod. Hij betegelde de badkamer bij mijn dochter. De regel van de bouwmarkt is: oppervlakte van de muur en dan 10% extra. Deze regel werkt echter niet altijd. Ik laat je een voorbeeld zien: de tegel heeft als afmetingen 30 cm × 60 cm. In dit voorbeeld ga ik uit van een muur van 1,62 m bij 2,20 m. Oppervlakte is dan 3,56 m^2 en 10% erbij geeft 3,92 m^2. De oppervlakte van één tegel is $0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$ m^2. Dat betekent dat je 22 tegels nodig hebt. Onzin zegt Steef. Elke tegelzetter ziet dat je er 24 nodig hebt; drie naast elkaar en acht boven elkaar. Voor een tegelzetter is het vanzelfsprekend dat je symmetrisch te werk gaat en dat betekent dat je wel 18 van de 24 tegels moet snijden.
Thuis het verhaal proberen te reproduceren en het klopt. Natuurlijk klopt het, want Steef is de vakman. Lijkt me een goede denkopdracht voor jezelf en voor de leerlingen van vmbo. Ik denk dat elke klas het aan kan.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*

Uitstekende prestaties bij Olympiades

Bij de zevende European Girls' Mathematical Olympiad, die medio april plaatsvond in Florence, Italië, heeft Gabriëlle Zwaneveld (17) uit Den Haag een zilveren medaille behaald. Christel van Diepen (17) uit Arnhem en Anouk Eggink (17) uit Deventer sleepten beiden een bronzen medaille in de wacht. Het vierde teamlid, Floor Beks (16) uit Grou, wist één van de zes wedstrijdopgaven foutloos op te lossen en kreeg hiervoor een eervolle vermelding.

Waar Christel en Anouk zich al plaatsten voor eerdere edities van de European Girls' Mathematics Olympiad, was deze wedstrijd voor Gabriëlle haar debuut op internationaal niveau. Gabriëlle: 'Het afgelopen jaar ben ik er helemaal voor gegaan. Een opgave oplossen is één ding, maar je oplossing dan ook nog afmaken met een waterdicht bewijs is een tweede. Dit is iets wat ik dit jaar bij de training heb geleerd en nu heel goed kon toepassen.'



vlnr Anouk, Gabriëlle, Christel en Floor

Bij de tiende Benelux Wiskunde Olympiade, die eind april plaatsvond in Luxemburg, heeft de 17-jarige Nils van de Berg uit het Noord-Brabantse Oosterhout een gouden medaille behaald. Zilver was er voor Jovan Gerbscheid uit Amsterdam, Szaby Buzogany uit Amersfoort, Lammert Westerdijk uit Leeuwarden en Thomas Chen uit Den Haag. Tim Vogels (Wageningen), Richard Wols (Meppel) en Floris Venselaar (Den Haag) haalden brons. Hanne Snijders (Rotterdam) en Philippe van Elderen (Heemstede) bleven zonder eremetaal. Met in totaal 160 punten wist Nederland de andere twee Beneluxlanden te verslaan. Deelnemer Richard Wols over de Benelux Wiskunde Olympiade: 'Het is echt heel leuk om op zo'n mooie plek wiskunde te mogen doen!' Gouden medaillewinnaar Nils van de Berg vult aan: 'Ja, het is fantastisch om aan zo'n uitdagende wedstrijd deel te nemen, maar het mooiste is toch wel het maken van internationale vrienden.'



vlnr Richard, Hanne, Floris, Tim, Jovan, Szaby, Nils, Thomas, Philippe en Lammert
Bron: Wiskunde PersDienst

Alcoholonderzoek verkeerd weergegeven

Onder meer het NOS Journaal wond er vrijdag 13 april, net als veel andere media, geen doekjes om: 'gezond drinken bestaat niet', en 'ook één glas per dag is te veel'. Dit zou blijken uit nieuw onderzoek, door onder andere het Erasmus Medisch Centrum. Maar in het artikel in *The Lancet* wordt die conclusie helemaal niet getrokken. De statistiek omtrent het drinken van matige hoeveelheden alcohol (tot 100 gram per week) levert zulke wisselvallige resultaten op, dat de verleiding groot is om selectief te gaan shoppen in de data.

Voor meer informatie: *https://www.nemokennislink.nl/publicaties/matig-drinken-is-niet-ongezond/*
Bron: Wiskunde PersDienst



Escher op reis in Leeuwarden

In 2018 staat Leeuwarden in het teken van Escher. Naast een grote tentoonstelling van zijn originele werk, presenteert het Fries Museum indrukwekkende hedendaagse kunst van (inter)nationale kunstenaars die vanuit dezelfde thematiek werken als M.C. Escher. De installaties zetten je op het verkeerde been en brengen je in een wereld waar niets is wat het lijkt.
Bovendien organiseert het museum onder de noemer Planeet Escher het gehele jaar projecten in de provincie, om uiteenlopende groepen binnen de *mienskip* samen te brengen met Escher als bindende factor. Kijk voor meer informatie op *friesmuseum.nl.*
FryslanDok heeft naar aanleiding van deze tentoonstelling op 14 april een documentaire van 30 minuten uitgezonden, die terug is te zien op Uitzending gemist: *https://www.npo.nl/fryslan-dok/14-04-2018/POW_03690242*
Op donderdag 26 april besteedde het programma Het Klokhuis ook aandacht aan Escher, zie *https://www.hetklokhuis.nl/tv-uitzending/3798/Escher*
Bron: *www.friesmuseum.nl*

Sleepnet van Justitie

Wat mag wel en wat niet met data uit gehackte telefoons? Hoewel PGP-encryptie theoretisch niet te is kraken, lukte het Justitie via de server van de Canadese PGP-provider Ennetcom toch om miljoenen PGP-berichten te ontcijferen. Mede op basis daarvan is kopstuk van de Mocromaffia Noffel F. in april tot 18 jaar cel veroordeeld. Maar Justitie gebruikt primitieve en onbetrouwbare algoritmes om bewijsmateriaal te vergaren uit grote databestanden, zegt dataonderzoeker David Graus. Hij hoopt dat dit niet de manier is waarop de overheid sleepnetten door onze internetdata gaat halen.
Voor meer informatie: *https://www.nemokennislink.nl/publicaties/het-sleepnet-van-justitie/*
Bron: Wiskunde PersDienst

Abelprijs voor Robert Langlands

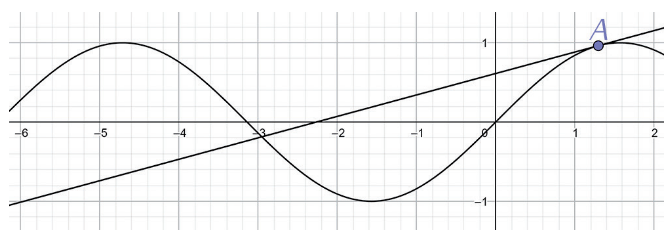
Op 19 maart kende de Norwegian Academy of Sciences de Abelprijs 2018 toe aan Robert Langlands (81 jaar, emeritus professor aan het Institute for Advanced Study in Princeton) voor zijn zogenaamde Langlandsprogramma. ‘Het programma is een theorie die allerlei verbindingen legt tussen zeer veel verschillende takken van de wiskunde. Denk daarbij aan algebra, meetkunde, getaltheorie, analyse en zelfs quantumfysica. De basis van dit Langlandsprogramma is in de jaren zestig van de vorige eeuw gelegd door Robert Langlands en hij baseerde zich op het werk van Evariste Galois’ (aldus Ger Limpens in zijn bespreking van het boek *Liefde en Wiskunde* in *Euclides* 92-5).
Bron: *http://www.ams.org/publicoutreach/math-in-the-media/math-in-the-media*

RAKEN EN SNIJDEN

Jan Otto Kranenborg

Voor veel leerlingen is het verwarrend als een raaklijn aan een grafiek ook nog snijpunten heeft. Immers, een raaklijn heeft toch maar één snijpunt met een grafiek gemeenschappelijk? Maar al te vaak wordt verwezen naar een raaklijn aan een cirkel, die precies één snijpunt met de cirkel gemeen heeft. Jan Otto Kranenborg onderzoekt raaklijnen aan de grafiek van *f*(x) = *sin*(x) met meerdere raak- en snijpunten.

Neem de functie $f(x) = \sin(x)$, en laat A een punt op de grafiek zijn, met $0 \leq x_A \leq \frac{1}{2}\pi$.



figuur 1

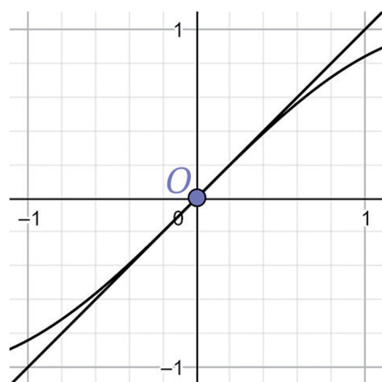
De keuze voor dit domein is vrij willekeurig: er had evenzo op het interval $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ gekeken kunnen worden; alleen dan zijn de raaklijnen in A dalend. We onderzoeken nu hoe de raaklijn in A de grafiek snijdt dan wel (nog eens) raakt.

Wat kan er gezegd worden over de mogelijke raak- en snijpunten?

Eerst twee bijzondere gevallen.

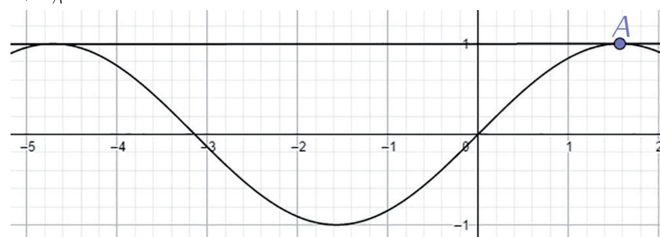
1) $x_A = 0$.

Er is slechts één gemeenschappelijk punt A en dat is hier $O(0, 0)$. De vergelijking van de raaklijn is $y = x$, zie figuur 2.



figuur 2

2) $x_A = \frac{1}{2}\pi$.

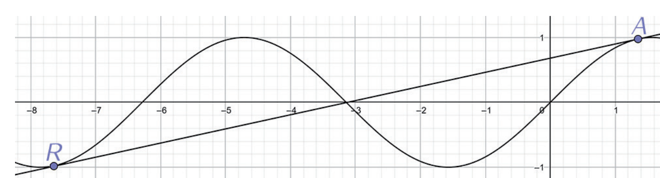


figuur 3

De raaklijn in A heeft in alle maxima (= toppen) van de functie een raakpunt. De coördinaten van de (oneindig veel) raakpunten zijn $A(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi, 1) = A((\frac{1}{2} + 2k)\pi, 1)$, waarin k een willekeurig geheel getal is. De vergelijking van de raaklijn is $y = 1$, zie figuur 3.

Nu gaan we onderzoeken hoe de raaklijn in A de grafiek van f snijdt.

Eerst maar eens kijken of punt A zo gekozen kan worden dat de raaklijn een tweede raakpunt R heeft en de grafiek ook nog eens (in een punt S) snijdt, zie figuur 4. Voor A kunnen we dus schrijven $A(x_A, y_A) = (x_A, \sin(x_A))$.



figuur 4

Het is niet geheel duidelijk wat de coördinaten van R zijn, maar vanwege symmetrie geldt dat het midden van A en R precies het punt $(-\pi, 0)$ is. Voor de vergelijking van de raaklijn in A geldt $y - y_A = f'(x_A)(x - x_A)$. Aangezien $f'(x) = \cos(x)$ wordt de raaklijnvergelijking

$y - \sin(x_A) = \cos(x_A)(x - x_A)$.

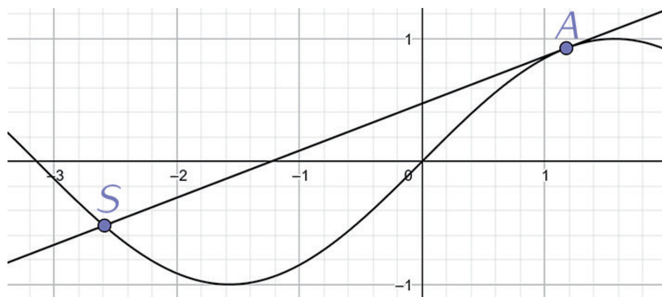
De raaklijn gaat door $(-\pi, 0)$, zodat

$0 - \sin(x_A) = \cos(x_A)(-\pi - x_A)$.

Er volgt dat $\sin(x_A) = \cos(x_A)(\pi + x_A)$, zodat x_A voldoet aan $\tan(x) = \pi + x$. Deze vergelijking kan niet algebraïsch opgelost worden, dus neem ik de grafische rekenmachine ter hand.
Deze geeft als oplossing: $x_A \approx 1{,}35181678 \approx 1{,}35$.

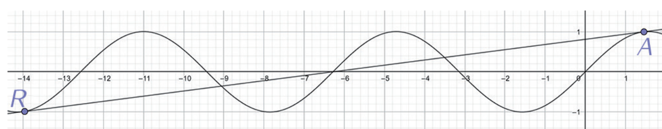
We kunnen concluderen dat:

- Als $0 < x_A < 1{,}35$ dan is er één raakpunt A en één snijpunt S, met $-\pi < x_S < 0$, zie figuur 5.
- Als $x_A \approx 1{,}35$ dan zijn er twee raakpunten A en R en één snijpunt $(-\pi, 0)$. Voor R geldt dan dat $x_R \approx -1{,}35 - 2\pi \approx -7{,}64$, zie figuur 4.



figuur 5

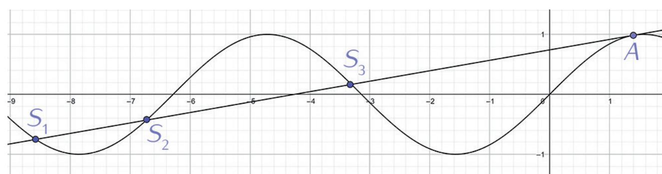
Nu dan de situatie dat de raaklijn de grafiek van f verder naar links raakt, zie figuur 6.



figuur 6

Weer uitgaande van $y - \sin(x_A) = \cos(x_A)(x - x_A)$ en de constatering dat de raaklijn door $(-2\pi, 0)$ gaat, vind je dat $0 - \sin(x_A) = \cos(x_A)(-2\pi - x_A)$, zodat
$\sin(x_A) = \cos(x_A)(2\pi + x_A)$.
Dus x_A voldoet aan $\tan(x) = 2\pi + x$; de grafische rekenmachine geeft dan $x_A \approx 1{,}4420665 \approx 1{,}44$.
We kunnen concluderen dat:

- Als $1{,}35 < x_A < 1{,}44$ dan is er één raakpunt A en zijn er drie snijpunten S_1, S_2 en S_3, waarbij voor de x-coördinaten geldt dat $-3\pi < x_{S_{1,2}} < -2\pi$ en $-2\pi < x_{S_3} < -\pi$, zie figuur 7.

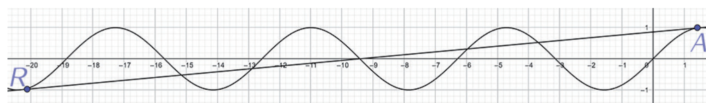


figuur 7

- Als $x_A \approx 1{,}44$ dan zijn er twee raakpunten A en R en drie snijpunten S_1, S_2 en S_3, waarvoor geldt dat

  $-3\pi < x_{S_1} < -2\pi$, $S_2(-2\pi, 0)$ en $-2\pi < x_{S_3} < -\pi$.

Voor R geldt dan dat $x_R \approx -1{,}44 - 4\pi \approx -14{,}01$, zie figuur 6.
Nu gaan we nog één keer een stap verder.



figuur 8

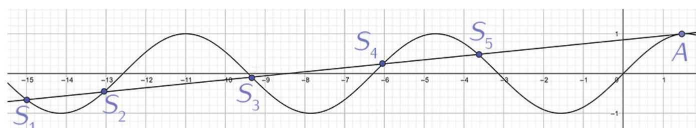
Weer uitgaande van $y - \sin(x_A) = \cos(x_A)(x - x_A)$ en de constatering dat de raaklijn door $(-3\pi, 0)$ gaat, volgt uit $0 - \sin(x_A) = \cos(x_A)(-3\pi - x_A)$, zodat
$\sin(x_A) = \cos(x_A)(3\pi + x_A)$.
Dus x_A voldoet aan $\tan(x) = 3\pi + x$; de grafische rekenmachine geeft dan $x_A \approx 1{,}4793437 \approx 1{,}48$.

We kunnen concluderen dat:

- Als $1{,}44 < x_A < 1{,}48$ dan is er één raakpunt A en zijn er vijf snijpunten S_1, S_2, S_3, S_4 en S_5, waarbij voor de x-coördinaten geldt dat $-5\pi < x_{S_{1,2}} < -4\pi$, $-3\pi < x_{S_3} < -2\pi$ en $-2\pi < x_{S_{4,5}} < -\pi$, zie figuur 9.

- Als $x_A \approx 1{,}48$ dan zijn er twee raakpunten A en R en vijf snijpunten S_1, S_2, S_3, S_4 en S_5, waarvoor geldt dat $-5\pi < x_{S_{1,2}} < -4\pi$, $S_3(-3\pi, 0)$ en $-2\pi < x_{S_{4,5}} < -\pi$.

Voor R geldt dan dat $x_R \approx -1{,}48 - 6\pi \approx -20{,}33$, zie figuur 8.



figuur 9

waarde k	vergelijking	X_A	X_R	aantal snijpunten
1	$\tan(x) = \pi + x$	1,3518	$-1{,}35 - 2\pi \approx -7{,}64$	1
2	$\tan(x) = 2\pi + x$	1,4421	$-1{,}44 - 4\pi \approx -14{,}01$	3
3	$\tan(x) = 3\pi + x$	1,4793	$-1{,}48 - 6\pi \approx -20{,}33$	5
4	$\tan(x) = 4\pi + x$	1,4998	$-1{,}50 - 8\pi \approx -26{,}63$	7
5	$\tan(x) = 5\pi + x$	1,5128	$-1{,}51 - 10\pi \approx -32{,}93$	9
10	$\tan(x) = 10\pi + x$	1,5405	$-1{,}54 - 20\pi \approx -64{,}37$	19
100	$\tan(x) = 100\pi + x$	1,5676	$-1{,}57 - 200\pi \approx -630$	199
1000	$\tan(x) = 1000\pi + x$	1,5704782	$-1{,}57 - 2000\pi \approx -6285$	1999
10000	$\tan(x) = 10000\pi + x$	1,5707645	$-1{,}57 - 20000\pi \approx -62833$	19999
100000	$\tan(x) = 100000\pi + x$	1,5707931	$-1{,}57 - 200000\pi \approx -628320$	199999
k	$\tan(x) = k\pi + x$	x_A	$x_A - 2k\pi$	$2k - 1$

tabel 1

'DE 5 VWO 'ER ZEGT DAN: 'MENEER, ZOU U DAT DAN EVEN VOOR MIJ WILLEN BEWIJZEN?'

Tabel 1 kan nu gemaakt worden.
Er wordt een steeds grotere waarde van k gekozen en met behulp van de grafische rekenmachine worden de x-coördinaten van A en R benaderd. In de laatste kolom staat het aantal snijpunten van de raaklijn in A met de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.

Het lukt (mij) niet meer om op het interval <0, ½π> voor $k > 100000$ de vergelijking $\tan(x) = k\pi + x$ nauwkeurig met de grafische rekenmachine op te lossen.
Het is duidelijk dat als k toeneemt dat dan x_A de waarde ½π ≈ 1,570796327 benadert, en de raaklijn in A steeds meer snijpunten met de grafiek van f zal hebben.
En: soms een tweede raakpunt heeft, namelijk als de x-coördinaat van A precies voldoet aan $\tan(x) = k\pi + x$ voor gehele waarden van k.
Uit de tabel blijkt dat voor $k = 100000$ het verschil van x_A met ½π slechts (ongeveer) 3×10^{-6} is.

Ofwel, $x = x_A \uparrow \frac{1}{2}\pi$ als $\lim_{k\to\infty} \tan(x) = k\pi + x$.

Twee beweringen doe ik als afsluiting:
Elke lijn heeft slechts 0, 1, 2 of oneindig veel raakpunten met de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ gemeen.
Raakt een lijn de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ tweemaal, dan gaat die lijn door een nulpunt van $f(x) = \sin(x)$.

De 5 vwo 'er zegt dan: 'Meneer, zou u dat dan even voor mij willen bewijzen?'

Over de auteur

Jan Otto Kranenborg is docent wiskunde op het Carolus Clusius College te Zwolle.
E-mailadres: *j.o.kranenborg@hetnet.nl*

HET FIZIER GERICHT OP...

Roos Blankepoor

REDENEREN OVER KANS

In Fizier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut of de Freudenthal Group for research into the didactics of mathematics een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering beschrijft Roos Blankespoor over het kansbegrip voor groep 7.



Redeneren over kans

Nadenken over de uitkomst van een kansexperiment is niet gemakkelijk. Toch valt er heel wat te zeggen over zulke kanssituaties. Neem bijvoorbeeld het gooien van een dobbelsteen. Redeneren over wat er allemaal kan gebeuren, vergt kennis over alle aantallen ogen die mogelijk zijn om te gooien (de uitkomstenruimte). Daarbij is het van belang je te realiseren dat het onzeker is welk aantal ogen je zult krijgen, elke keer dat je een dobbelsteen gooit. Echter, als je vaker gooit, wordt de frequentie-verdeling van de aantallen ogen die je hebt gegooid steeds voorspelbaarder. Elke uitkomst zal uiteindelijk, bij een eerlijke dobbelsteen, vrijwel even vaak gegooid zijn, wat ervoor zorgt dat de relatieve frequentie de theoretische kans zal benaderen. Het juist kunnen redeneren over kanssituaties vergt hogere orde denkvaardigheden zoals het kunnen nadenken over en koppelen van kennis over de uitkomstenruimte aan het inzicht over de (on) voorspelbaarheid van de uitkomsten. Daarom is het begrijpelijk dat 'kans' geen onderdeel uitmaakt van het basisschool-curriculum. Onderzoek laat echter zien dat jonge kinderen goed kunnen leren redeneren over kans.[1] Om leerlingen al op jongere leeftijd meer vertrouwd te maken met het redeneren over kanssituaties, en om te onderzoeken hoe dit redeneren zich ontwikkelt, introduceren we in ons onderzoek lessen rondom kans al in groep 7. Vanwege praktische redenen kozen we voor deze leeftijdsgroep, maar de beschreven activiteiten zijn ook geschikt om te doen met jongere of juist oudere leerlingen, bijvoorbeeld in het voortgezet onderwijs.

'ONDERZOEK LAAT ECHTER ZIEN DAT JONGE KINDEREN GOED KUNNEN LEREN REDENEREN OVER KANS.'

Voorbeeld uit de praktijk

De lessen in ons onderzoek zijn opgezet rond drie vragen: *Wat kun je krijgen?* (1), *Wat zul je krijgen?* (2) en *Wat heb je gekregen?* (3). Deze vragen zetten leerlingen, gebaseerd op alle uitkomsten in de uitkomstenruimte (vraag 1), aan tot het maken van een voorspelling (vraag 2), waarbij ze bij het vaak herhalen van een kansexperiment de verkregen frequentieverdeling (vraag 3) ook weer kunnen koppelen aan de uitkomstenruimte. Op deze manier helpen we leerlingen om onderscheid te kunnen maken tussen de elementaire uitkomsten (die elk maar één keer voorkomen), en de soorten (geaggregeerde) uitkomsten. Dit inzicht is belangrijk bij het juist kunnen redeneren over de kans op een bepaalde uitkomst.[2] Een voorbeeldactiviteit uit onze lessenserie van zes lessen draait om het nadenken over het gooien van een aangepaste dobbelsteen, waarbij de zes is vervangen door een vijf, zie figuur 1.



figuur 1 De aangepaste dobbelsteen waarbij de '6' is vervangen door een extra '5'

Uitkomstenruimte

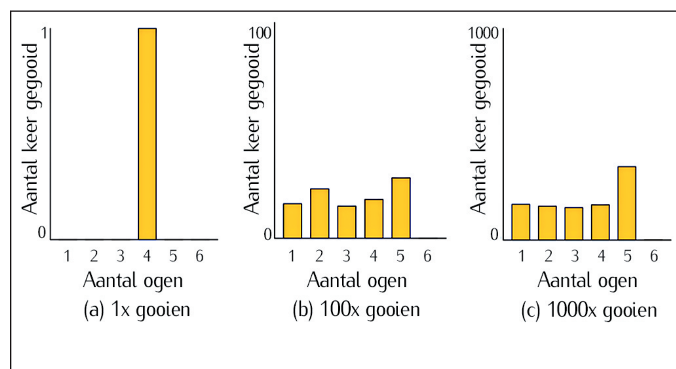
De eerste vraag, *Wat kun je krijgen?*, is bedoeld om leerlingen na te laten denken over alle mogelijke uitkomsten bij het gooien van de dobbelsteen. Bij de aangepaste dobbelsteen kunnen leerlingen zien dat er op elk vlak een aantal ogen staat (1, 2, 3, 4, 5 en 5 ogen). Maar, in tegenstelling tot een normale dobbelsteen, zijn er maar vijf verschillende *soorten* (geaggregeerde) uitkomsten (1, 2, 3, 4, 5). De '5' komt twee keer voor. Voor het juist kunnen redeneren over de kans op een bepaalde uitkomst, is het vooral van belang dat de onderliggende structuur van de uitkomstenruimte, en hoe vaak elke uitkomst daarin voorkomt, duidelijk worden. Door het gebruik van deze aangepaste dobbelsteen, en de vergelijking met een normale dobbelsteen, wordt dit voor leerlingen op een eenvoudige manier inzichtelijk gemaakt.

Voorspellen

De tweede vraag, *Wat zul je krijgen?*, is bedoeld om leerlingen een voorspelling te laten doen over het aantal ogen dat ze denken te krijgen bij het gooien van de dobbelsteen. Hierbij kan de docent verwijzen naar wat de leerlingen eerder hebben geantwoord op vraag 1. Leerlingen kunnen zo beredeneren dat de kans om '5' te gooien bij deze aangepaste dobbelsteen aanzienlijk groter is dan de kans op elke andere uitkomst, die maar één keer voorkomt. Deze vraag zet leerlingen ook aan het denken over de onvoorspelbaarheid van elke individuele uitkomst van het gooien van een dobbelsteen. De docent kan leerlingen de opdracht geven om de dobbelsteen eens te gooien, zodat ze kunnen nagaan of hun voorspelling wel, of misschien niet uitkomt. Als toevoeging kan de docent aan de leerlingen vragen wat ze denken dat er gebeurt met de aantallen ogen, als er veel vaker, bijvoorbeeld 100 keer of 1000 keer, gegooid wordt. Dit vormt dan een mooi opstapje naar de volgende vraag.

Verdeling van uitkomsten

De derde vraag, *Wat heb je gekregen?*, is bedoeld om leerlingen te laten nadenken over de verkregen uitkomsten van het (heel) vaak met een dobbelsteen gooien. Hiervoor kan de docent iedere leerling de opdracht geven elk dertig keer de dobbelsteen te gooien. In een staafgrafiek op een werkblad kunnen ze de gevonden uitkomsten zelf noteren. Door leerlingen te laten werken met een speciaal ontwikkelde computersimulatie[3] kan het aantal dobbelsteenworpen makkelijk worden uitgebreid. Op deze manier kunnen leerlingen zien dat de onvoorspelbare uitkomst van elk keer worp afzonderlijk, zie figuur 2a, na een aantal keer gooien toch leidt tot een voorspelbare verdeling van verkregen uitkomsten, zie figuur 2b en 2c. De docent kan leerlingen laten nadenken over de relatie tussen de verkregen verdeling van uitkomsten en de aantallen ogen die op de dobbelsteen staan, door te vragen: 'waarom is de '5' veel vaker gegooid?' Op deze manier zullen leerlingen inzien dat het van belang is



figuur 2a, b, c Verdeling van uitkomsten na het simuleren van gooien met de aangepaste dobbelsteen door de computersimulatie

onderscheid te maken tussen de geaggregeerde uitkomsten en hoe vaak deze voorkomen, om te kunnen beredeneren waarom de '5' vaker is gegooid.

De beschreven activiteit is onderdeel van les twee uit een nieuw ontwikkelde lessenserie van zes lessen over kans voor groep 7. Door het stellen van de drie vragen en daarbij de uitkomstenruimte als basis te nemen, krijgen leerlingen een eerste houvast bij het juist kunnen maken van voorspellingen.

Noten

[1] Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Gottardis, L., & Terlektsi, M.-E. (2014). The cognitive demands of understanding the sample space. *ZDM*, 46(3), 437-448. doi:10.1007/s11858-014-0581-3

[2] Bryant, P., & Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability. A literature review.* London: Nuffield Foundation.

[3] *http://goo.gl/vce6Tb*

Over de auteur

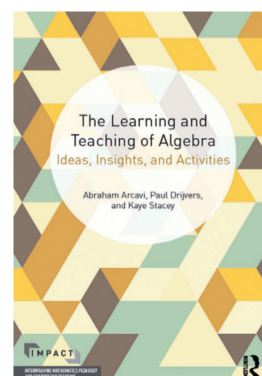
Roos Blankespoor doet promotieonderzoek bij Marja van den Heuvel-Panhuizen, Michiel Veldhuis en Jan Boon van het Freudenthalinstituut for research into the didactics of mathematics aan de Universiteit Utrecht. Haar onderzoek richt zich op redeneren over kans in het primair onderwijs.
E-mailadres: *R.J.Blankespoor@uu.nl*



BOEKBESPREKING

Bert Zwaneveld

THE LEARNING AND TEACHING OF ALGEBRA



Titel: The Learning and Teaching of Algebra
Ondertitel: Ideas, Insights, and Activities
Auteurs: Abraham Arcavi, Paul Drijvers and Kaye Stacey
Uitgever: Routledge (Abingdon, Oxon; New York, NY, 2017)
ISBN: 978-0-415-74372-3, 144 pagina's (paperback)
Prijs: £ 29,99

Dit boek is het eerste deel in een nieuwe serie boeken onder de titel: *IMPACT*. Dat is de afkorting van *Interweaving Mathematics Pedagogy and Content for Teaching*. (In de Engelstalige wereld wordt vaak de term pedagogy gebruikt, waar wij de term didactiek gebruiken.) Dit boek is bedoeld voor *students, teachers, and teacher educators, hoping that this book will contribute to making learning of algebra productive, enjoyable, and accessible to all*. Het boek bevat vijf hoofdstukken:

1. Algebra: Setting the Scene
2. Some Lessons From History
3. Seeing Algebra Through the Eyes of a Learner
4. Emphases in Algebra Teaching
5. Algebra Education in the Digital Era.

Eerst een korte samenvatting per hoofdstuk.

Schoolalgebra

De belangrijkste aspecten van de problematiek van de schoolalgebra komen in hoofdstuk 1 aan de orde: (1) wat is het doel van algebra, (2) welke activiteiten horen daarbij, (3) welke wiskundige objecten spelen daarbij een rol? De antwoorden op deze drie vragen luiden kort samengevat als volgt. Op de eerste vraag: generalisaties uitdrukken, verbanden vaststellen, problemen oplossen, eigenschappen exploreren, stellingen bewijzen, berekeningen uitvoeren. Antwoorden op de tweede vraag zijn: ten eerste opmerken (*noticing*), beschrijven, betekenis geven (*denoting*) en weergeven. Ten tweede: symbolische uitdrukkingen hanteren. Ten derde: 'ontsymboliseren' en lezen. Ten vierde: representaties met elkaar verbinden. En ten laatste: algebraïsche uitdrukkingen creëren. Het antwoord op de derde vraag naar de objecten waar het bij algebra op school om gaat: tekens, variabelen, algebraïsche uitdrukkingen, vergelijkingen en relaties en functies. Uiteraard, zou ik bijna zeggen, worden al deze antwoorden uitgewerkt en van inspirerende voorbeelden voorzien. Dat gebeurt overigens ook in alle volgende hoofdstukken.

Lessen uit de geschiedenis

Hoofdstuk 2 behandelt vrij kort vier voorbeelden uit de geschiedenis van de wiskunde die relevant zijn voor de algebra op school. Aan de orde komen: hoe de oude Egyptenaren lineaire vergelijkingen gebruikten bij het oplossen van wat wij wel woordproblemen noemen, hoe de oude Babyloniërs kwadratische vergelijkingen oplosten, hoe de oude Arabieren bepaalde kwadratische vergelijkingen meetkundig oplosten, en hoe in de $16^e/17^e$ eeuw in Europa van uitdrukkingen als $A - (B + C)$ en als $A - (B - C)$ verklaard werd waarom bij het wegwerken van haakjes deze overgaan in $A - B - C$ en $A - B + C$. En ook hoe in Europa in de $18^e/19^e$ eeuw met negatieve getallen werd omgegaan. Die waren toen namelijk nog lang niet algemeen geaccepteerd. Dit hoofdstuk maakt duidelijk dat het niet verwonderlijk is dat leerlingen moeite hebben met algebra, en ook dat de wijze waarop (heel) vroeger algebraïsche problemen werden aangepakt, heel goed een plaats in het huidige wiskundeonderwijs kan hebben.

Problemen van leerlingen met algebra

De problemen van leerlingen met algebra komen in hoofdstuk 3 uitvoerig aan de orde. Deze worden gebracht in het kader van wat in de (algemeen-)didactische literatuur *pedagogical content knowledge* (pck) heet. Dit wordt wel omschreven als 'het amalgaam van de didactische en inhoudelijke kennis van de leraar'. Hier wordt de nadruk gelegd op het inlevingsvermogen van de leraar in de manier waarop de leerlingen denken bij algebra. Zij moeten immers, vooral na het rekenen van het primair onderwijs, op een andere manier gaan denken. De auteurs gebruiken de metafoor van de bifocale bril die de leraar moet opzetten: er zijn lenzen waarmee als volwassene naar algebra wordt gekeken én lenzen waarmee leerlingen ernaar kijken. Achtereenvolgens komen de volgende thema's aan de orde. Wat stellen de letters bij algebra voor? Wat is er mis met een uitleg als: $3a + 4p$ 'betekent' 3 appels en 4 peren? Hoe om te gaan met een uitdrukking als $h + 10$? Dat is op een gegeven moment niet meer het proces van 10 optellen, zoals bij rekenen, maar een algebraïsch object op zich. Van dat object kan bijvoorbeeld een grafiek getekend worden. Dit staat bekend als de proces-object-dualiteit. Wat betekent het = - teken nu eigenlijk? Hoe kan algebra gebruikt worden

bij het beschrijven van patronen? Denk hierbij aan de driehoeksgetallen. Welke problemen ontmoeten leerlingen bij de overgang van rekenen met getallen naar algebra? En welke rol spelen vergelijkingen daarbij? We komen hierbij ook op het terrein van de creativiteit. Het boek geeft een mooi voorbeeld waarbij de leerlingen zelf een vergelijking bij een zeker niet triviaal probleem moeten opstellen (zie het kader). Welke procedures spelen een rol bij (het begin van) het leren oplossen van vergelijkingen? Hoe kijken leerlingen naar functies? Ook hier komt de proces-object-dualiteit aan de orde: eerst is een functie een proces om bij een invoergetal de uitvoer te berekenen, maar later wordt het een object met bepaalde eigenschappen. Denk aan de betekenis van de getallen 3 en 4 bij de functie $x \to 3x + 4$.

Jim en Ken

Jim kocht chocolaatjes en gaf de helft aan Ken. Ken kocht snoepjes en gaf de helft aan Jim. Jim at 12 snoepjes en Ken 18 chocolaatjes. Daarna was de verhouding van het aantal snoepjes en chocolaatjes voor Jim 1 : 7. Voor Ken was die verhouding 1 : 4. Hoeveel snoepjes kocht Ken?

Algebraonderwijs

Het vierde hoofdstuk, geschreven vanuit de optiek van de leraar, zoomt in op de volgende onderwerpen: algebra en contexten, productief oefenen, eerherstel voor routine én inzicht, gebruik maken van fouten van leerlingen om ze te leren te begrijpen waarom iets fout is en hoe ze tot inzicht te brengen, de rol van bewijzen bij algebra. Denk bij dit laatste aan het bewijzen van de *abc*-formule. Denk bij het eerste aan de rol die contexten kunnen spelen om de leerlingen een gevoel te geven voor wat het doel van algebra kan zijn, en wat het nut ervan is bij het oplossen van problemen. Wat hierbij zeker van belang is de authenticiteit van de probleemsituatie voor leerlingen. Leerlingen moeten overigens dat gevoel voor het doel van algebra ook krijgen bij abstracte problemen. Dit kan, bijvoorbeeld, door aan te sluiten bij patronen met getallen. Of door de leerlingen een getal in gedachten te laten nemen, daarmee rekenkundig te laten manipuleren en dan bijvoorbeeld op 1 uit te komen. Hoe kan dat?

Inzet van ict

Hoofdstuk 5 bespreekt eerst een aantal digitale hulpmiddelen vanuit de technisch-algebraïsche mogelijkheden. Vervolgens komen de didactische mogelijkheden aan de orde met de nadruk op de dynamische mogelijkheden. Denk hierbij aan GeoGebra dat ook een module met een computeralgebrasysteem (cas) bevat. De volgende indeling van de didactische functies worden besproken: algebra doen, algebra leren, oefenen van vaardigheden en ontwikkelen van begrippen. Deze functies worden besproken en geïllustreerd met drie van de genoemde objecten van algebra op school: variabelen, vergelijkingen met speciaal aandacht voor de gelijkwaardigheid van de vergelijkingen die bij het stapsgewijs oplossen optreden en functies. Het hoofdstuk wordt afgesloten met een meer reflectief, onderzoeksgeoriënteerd perspectief op het inzetten van ict bij algebra. De schrijvers merken op dat wel duidelijk is dat het inzetten van ict in het algebraonderwijs 'werkt', maar dat we niet verbaasd moeten zijn dat de effecten (vooralsnog?) vrij klein zijn. Ze eindigen dan ook met een aanbeveling: kies zorgvuldig de opdrachten en de digitale hulpmiddelen daarbij en probeer het onderwijs met deze opdrachten zo vruchtbaar mogelijk te maken door bedacht te zijn op de balans op inzicht en routine, tussen digitaal en met pen-en-papier werken, zodat inzicht, vaardigheden en het meester worden over de digitale hulpmiddelen gelijk opgaan, terwijl het gevoel voor het doel van de algebra steeds meer ontwikkeld wordt.

Drempeldomein

Toen ik het boek uit had werd mij opnieuw duidelijk hoe complex algebra op school is. Ik denk dat het niet alleen een aantal drempelbegrippen omvat, maar zelf een drempeldomein is. Drempelbegrippen worden in de onderzoeksliteratuur gedefinieerd als begrippen die een student of leerling moet beheersen als die tot het vakgebied waar dat begrip gebruikt wordt, wil gaan behoren. Drempelbegrippen worden gekarakteriseerd door: ze geven je een hele nieuwe kijk op het vakgebied, als je het begrip eenmaal beheerst kun je eigenlijk niet meer terug naar een naïevere kijk erop, het neemt allerlei onderdelen samen, het is aanvankelijk tegen-intuïtief, het begrenst het vakgebied en het bepaalt het taalgebruik. Dit lijkt me allemaal voor algebra op school te gelden. Hoewel ik aanneem dat veel van de inhoud van dit boek bij wiskundeleraren min of meer bekend is, vind ik het goed dat het allemaal mooi overzichtelijk bij elkaar is gezet. Het kan een uitstekende inspiratiebron zijn voor wiskundeleraren in opleiding, bijvoorbeeld bij hun afstudeeronderzoek. Het biedt tal van goede voorbeelden, waarbij de theoretische achtergrond ruim aandacht krijgt. Ook wiskundesecties kunnen het goed gebruiken als bijvoorbeeld jaarthema om bepaalde onderdelen van het algebraonderwijs op hun school eens nader onder de loep te nemen en te verbeteren. Het vijfde hoofdstuk, over het inzetten van digitale hulpmiddelen bij algebra, sprak mij in dit verband zeer aan. Want ik denk dat daar nog een wereld te winnen is.

Over de auteur

Bert Zwaneveld is emeritus hoogleraar professionalisering van de leraar in het bijzonder in het wiskundeonderwijs en informaticaonderwijs van de Open Universiteit.
E-mailadres: *zwane013@planet.nl*

EN DAT IS DAN (2 + 0 + 1) X 8 = 24!

Rob van Oord

Op 2 en 3 februari jl vonden de Nationale Wiskunde Dagen plaats. Rob van Oord gaf er een doorlopende workshop en kon dat ook nog combineren met zijn rol als vliegende reporter voor *Euclides*.

Met een flippo op de achterkant van de Funrun trofee (het traditionele T-shirt) wordt cryptisch uitgebeeld dat dit jaar de NWD voor de vierentwintigste keer is gehouden. Met een auto vol spullen en twee collega's van mijn oude school gingen we goedgemutst naar Noordwijkerhout.



figuur 1 Leila Schneps

Wie heeft er gelijk?

De openingslezing van de NWD was van Leila Schneps. Hoewel zij van huis uit getaltheoreticus is, heeft ze bijzondere belangstelling voor wiskunde bij moordprocessen. Ze schrijft ook thrillers onder het pseudoniem Catherine Shaw. In een boeiend verhaal liet Leila zien hoe je de fout in kunt gaan door statistische gegevens verkeerd te gebruiken. Ze liet zien hoe aanvullende informatie en vooroordelen van invloed kunnen zijn op het oordeel (van een jury) over een verdachte. Als publiek konden we interactief stemmen op uitspraken over de geloofwaardigheid van extra argumenten of iemand schuldig zou zijn aan een moord. Ook als wiskundemensen onder elkaar waren we telkens behoorlijk verdeeld. Ze schreef hier een boek over: *Math on Trial, how members get used and abused in the courtroom.* Ook uitspraken over de kans op kanker na een positieve test kunnen behoorlijk fout zijn, omdat hier voorwaardelijke kansen bij grote aantallen aan de orde zijn. Neem aan dat bekend is dat voor een bepaalde test geldt dat deze voor 95% van de vrouwen die kanker hebben een positieve uitslag geeft. Neem bovendien aan dat 1 op de 1000 vrouwen kanker heeft. Neem ook aan dat de kans op een positieve uitslag op de test bij gezonde vrouwen 1% is. Bij 100.000 vrouwen die getest worden hebben er dus 100 kanker. De test geeft dan 95 keer een positieve uitslag. Maar bovendien geeft de test bij 1% van de 99.900 vrouwen zonder kanker foutief aan dat er kanker is (1% geeft foute uitslag). Dus van de (999 + 95 =) 1094 positieve testen hebben er maar 95 echt kanker. Dit is 8,7%. De ene dokter beweert dat je bij een positieve uitslag 95% kans hebt dat je echt kanker hebt, terwijl de andere dokter zegt dat de kans slechts 1 op 10 is. Welke dokter heeft er nu gelijk?

Een eitje

Na de lunch volgde ik de lezing van Robert Mudde. Hij demonstreerde dat vrijwel alle vragen in het dagelijks leven op te lossen zijn met de 'balansvergelijking': $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \mathit{in} - \mathit{uit} + \mathit{productie}$. Ik kreeg bij zijn lezing weer hetzelfde gevoel als ik altijd heb bij een natuurkundeprobleem. Je hoeft 'alleen maar' de differentiaalvergelijking op te stellen. Maar je moet wel even weten wat er constant blijft en hoe het behoud van energie moet worden ingepast. Dat geleiding evenredig gaat met de diameter van een staaf of evenredig met de inhoud van bol. Dat alle eenheden moeten kloppen dus dat er altijd wel een constante bij komt die er in feite voor zorgt dat de eenheden van beide kanten van de vergelijking gelijk zijn. Als de leraar het voorzegt is het 'o ja', maar zelf kom ik er niet op. Het model waarbij je kijkt naar de wereldbevolking die 1% per jaar groeit, waarbij er dus niemand van buiten de aarde bij komt en er niemand van de aarde weggaat snap ik nog wel.
Het levert in het balansmodel $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0 - 0 + 0{,}01N(t)$

met de oplossing van

$N'(t) = 0{,}01 \cdot N(t)$ is $N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{0{,}01t}$.

Maar de balansvergelijking bij de vraag hoe lang je een struisvogelei moet koken als je voor een kippenei (van zeg 60 gram) 8 minuten rekent, is al een stuk lastiger. Bij een ei in heet water gaat het erom hoe lang het duurt voordat de warmte van het kokende water buiten het ei ervoor zorgt dat het binnenste op 70º C komt, de temperatuur waarop eiwit stolt. In de balansvergelijking gaat er alleen warmte in het ei, er komt geen warmte uit en er wordt ook geen warmte geproduceerd, dus de balansvergelijking is $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathit{in}$. Je moet ook bedenken

dat de vloeistof in het ei stilstaat, dus er vindt alleen geleiding plaats. Omdat een ei ongeveer bolvormig is gaat de geleiding evenredig met D^3, met diameter D van het ei. $\Delta E \sim D^3 \cdot \rho \cdot c_P \cdot \Delta T$, met c_P de soortelijke warmte van de eivloeistof en ρ een constante.

Hieruit volgt $\frac{dE}{dt} \sim D^3 \cdot \rho \cdot c_P \cdot \frac{dT}{dt}$.

Je kunt stellen dat $D^3 \sim massa$ is, dus $D^2 \sim massa^{2/3}$.

Dit geeft uiteindelijk

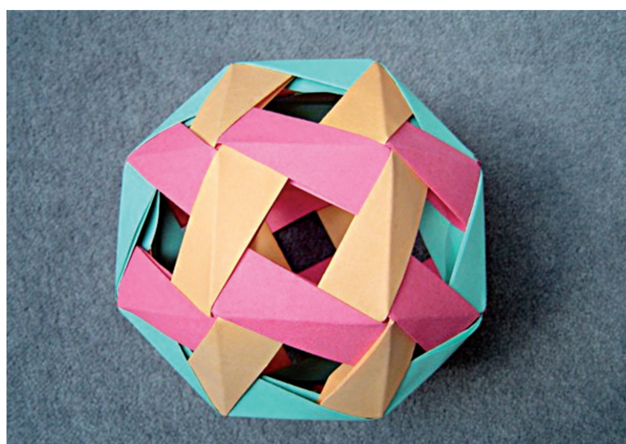
$$t_{struisvogel} = \left(\frac{m_{struisvogel}}{m_{kip}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot t_{kip} \quad \text{oftewel}$$

$$t_{struisvogel} = \left(\frac{1200}{60}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 8 = 58{,}94 \quad \text{minuten.}$$

Dus het koken van een struisvogelei duurt ongeveer 60 minuten.

Knutselhoek

Tussen de workshops en lezingen door ben ik gauw naar de Harvardzaal gegaan. Florine Meijer en ik hebben daar een knutselhoek gemaakt. Een soort doorlopende workshop met boeiende wiskundige modellen. Op tafel liggen allerlei voorbeelden en bouwplaten die deelnemers aan de NWD kunnen gebruiken om iets na te maken of zelf creatief mee bezig te zijn. Er waren voortdurend flink wat collega's aan het knutselen. De kubus binnenste-buiten, origami met modules, zie figuur 2, harten vlechten, flexagons, Möbius harten, enzovoorts. Op de volgende NWD ga ik een workshop geven waarbij ik dieper zal ingaan op de samenhang tussen de modellen.

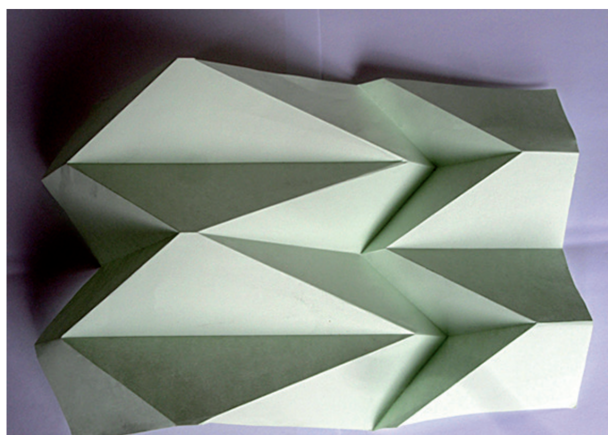


figuur 2 Origami met modules

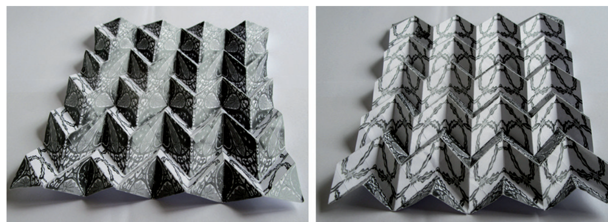
Het werken met modellen is hot. Ik las deze week in de krant dat Peter Beck een *Humanity Star* in een baan om de aarde heeft gelanceerd. 'Een hemelse discobal (met een doorsnee van ruim een meter) die de mensen moet herinneren aan hun kwetsbare plek in het universum.' En Elon Musk liet een knalrode Tesla-auto de ruimte in schieten.

Vouwen

Wat doe je met de NWD-posters die over zijn? Henk van der Vorst wist er wel raad mee. Met de speciale zigzag-vouwtechniek wist hij de afgelopen maanden veel mooie kunstwerken te vouwen. In het Atrium kon je zijn creaties ook bewonderen. In de workshop oefenden we met de techniek. Henk kwam later ook nog in onze knutselhoek om met liefhebbers een groter object te vouwen. Voordat je aan een groot vouwsel begint, moet je eerst eens uitzoeken welk effect de vouwhoeken op de kromming van het eindproduct hebben. Wat duidelijk wordt is dat je gewoon zelf moet gaan proberen om te snappen welke vouwhoeken een mooi resultaat opleveren. Neem een A4'tje en probeer maar, zie figuur 3.
In figuur 4 zie je hoe hij na het vouwen twee verschillende aanzichten heeft gecreëerd. De ene kijkrichting zie je een donker patroon, de andere een licht patroon.
Bij het ontwerpen kun je daar op inspelen.



figuur 3



figuur 4

Avonduren

In de avondlezing nam Katie Steckles ons mee naar allerlei wiskundige vouwsels en knipsels. Katie is een jonge Britse wiskundige uit Manchester die op middelbare scholen workshops geeft waarin ze leerlingen enthousiast maakt voor wiskunde. In 2016 kreeg ze de Josh Award voor haar inspanningen om wiskunde populair te maken. Een van haar uitdagingen was dat je uit een vierkant blaadje met één keer in een rechte lijn knippen elke letter van het alfabet kunt maken. Het wiskundige aspect zit hem in het uitzoeken hoe je het blaadje moet vouwen zodat het lukt. Op onze stoelen lagen enkele blaadjes waarmee we meteen tijdens de lezing haar ideeën in de

praktijk konden brengen. Dit keer kon ik geen nieuw spel uitproberen bij de spelletjes. Maar van de organisatie kregen alle workshopleiders een spel cadeau. Thuisgekomen pakte ik mijn cadeau uit. Het heet *Vortex*, een recente Nederlandse uitvinding. Gemaakt voor 1-6 spelers, zie figuur 5. De pionnen (routers genoemd) zien er uit als het binnenste van een wankelmotor: drie cirkelbogen op de zijden van een gelijkzijdige driehoek. Van elke kleur worden rondom de 'toren' in het midden zes routers op een cirkelvormige schijf geplaatst. Er zijn 19 schijven die allemaal in elkaar haken. Je mag per beurt vier keer een schijf optillen en draaien waarmee je moet proberen de pionnen van je eigen kleur als eerste naar de overkant te draaien. Maar daarna is een andere speler aan de beurt met vier keer draaien en dan kunnen je pionnen weer heel ergens anders terechtkomen.
Naast het basisspel is er nog een aantal varianten die je met dit bord kunt spelen.

figuur 5

Je kunt er niet vroeg genoeg mee beginnen ...

De laatste lezing die ik bijwoonde werd gegeven door Lieven Verschaffel. Welke reken/wiskunde-ervaringen bij jonge kinderen zorgen ervoor dat je later beter beslagen ten ijs komt bij wiskunde? In acht items doet Lieven uit de doeken welke factoren wel, en welke niet bijdragen tot een voorspelde betere basis voor wiskunde. Het belangrijkste is dat er nu steeds meer aandacht is voor onderzoek naar voorspellend belang van gericht onderwijs van getallen en relaties. De resultaten daarvan kunnen leiden tot een goede aanpak van reken/wiskundelessen vanaf de kleutertijd voor beter leren van wiskunde op de middelbare school. Piaget was een van de eerste die daar serieus onderzoek naar heeft gedaan. Hij richtte zich op logisch mathematische vaardigheden. Er is niet duidelijk aangetoond dat zijn aanpak tot hogere wiskundige vaardigheden leidt. Maar tellen op weg naar rekenen heeft meer effect. Neuropsychologisch onderzoek heeft aangetoond dat leren tellen, onderscheiden in vijf telprincipes, bepalend is om later goed te worden in wiskunde. Er zijn onderzoeken geweest naar hoe mensen numerieke informatie representeren. Aantallen schatten en aantallen vergelijken, zowel symbolisch als niet symbolisch stimuleren de zogenoemde *number sense*.
Een beter grootheidsbegrip leidt tot een hogere wiskundevaardigheid. Aandacht voor operaties, zoals optellen geeft toename, wegnemen leidt tot afname, kenmerken van commutativiteit en associativiteit, zorgen ook voor een hogere wiskundevaardigheid aan het eind van de basisschool. Mijn vrouw is kleuterjuf. Als zij haar rekenactiviteiten voorbereidt hebben we het vaak over wat ze dan spelenderwijs zou kunnen doen. Ontdekken van patronen en structuren, in rijtjes gekleurde kralen, of ontbrekende lijntjes laten aanvullen. Spontane aandacht voor getallen, relaties, patronen en structuren maken de les rijker. Het voeren van een raaf (pop) met bessen, waarbij de kleuters meetellen, het tonen van plaatjes, 'wat zie je?', waarbij ze dan ook het aantal noemen van de dieren die ze zien. Onderzoek wijst uit dat dit allemaal factoren zijn die bijdragen aan een betere wiskundevaardigheid. Ten slotte moeten we niet vergeten dat ook factoren als intelligentie, cognitieve flexibiliteit, taalvaardigheid, werkgeheugen een rol spelen bij de ontwikkeling van wiskunde bij kinderen. In de klas van mijn vrouw zitten steeds meer kinderen die een taalachterstand hebben, weinig van thuis meekrijgen op het gebied van lezen en spelletjes doen. Voor hen is het vaak moeilijk om te begrijpen wat de vraag van de juf betekent. Ook bij tel- en rekenopdrachten is hoe je het zegt belangrijk. Maar duidelijk is dat je niet vroeg genoeg kunt beginnen met tellen en rekenen.

Zwart-witte dieren

In een wervelende show met plaatjes en filmpjes toonde Luc van den Broeck in de afsluitende lezing hoe hij met zijn leerlingen in Excel via sleutelfuncties de plaatjes van twee verschillende dieren kan omzetten naar een derde dier. Zo liet hij ons zien dat een konijn en een vis om te vormen zijn tot een bok. Het principe berust er op om hokjes binnen een dier zwart te maken en erbuiten wit. De gebruikte techniek maakt enkel gebruik van tabellen met logische functies, zie figuur 6.

Fase 5: combineer de cellen *x* van de olifant met de overeenkomstige cellen *y* van de sleutel tot een versleutelde boodschap met de onderstaande functie *f*

	0	1
0	0	1
1	1	0

$$f(x,y) = \text{REST}(x+y,2)$$

$$f(x,y) = \text{XOR}(x+y)$$

figuur 6 Uit de presentatie van Luc van den Broeck

Op naar de 25e editie van de NWD!

Over de auteur

Rob van Oord is docent wiskunde, van augustus 1974 tot augustus 2014 op het Coenecoop College in Waddinxveen, daarna als invaller op scholen in de regio. Hij is voorzitter van de NVvW werkgroep havo-vwo en redactielid van de Zebra reeks. E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

25 JAAR WERELDWISKUNDE FONDS

Evert van de Vrie

In 1993 nam Hans Wisbrun het initiatief om het Wereldwiskunde Fonds op te richten. Onder het motto 'Wij willen meer contributie betalen', kreeg hij veel leraren wiskunde mee om een fonds op te richten dat projecten in ontwikkelingslanden steunt die gericht zijn op het verbeteren van het wiskundeonderwijs. 25 jaar verder is het een goed moment om eens terug te kijken hoe het WwF zich heeft ontwikkeld. Is het doel van het fonds nog steeds relevant en is de werkwijze er goed op afgestemd? Een bericht van de huidige voorzitter van



Uitgangspunten en werkwijzen

Na een positief besluit van de NVvW en een periode om mensen te vinden die de schouders er onder willen zetten, vindt op 14 september 1994 een eerste bijeenkomst plaats van wat toen nog de 'Werkgroep derde wereld fonds' heet. Naast Hans Wisbrun maken Johan Derks, Liselot van Dam, Ruud Jongeling en Marlies Zonneveld deel uit van de werkgroep. Bijna allen hebben persoonlijk ervaring met het geven van wiskundeonderwijs in ontwikkelingslanden. De eerste discussies gaan over 'uitgangspunten' en 'werkwijzen'. Er is al een budget beschikbaar, dus de druk wordt al direct gevoeld om op gang te komen en iets zichtbaars te creëren.

Eerste project in Zambia

Begin februari 1995 liggen de eerste projectaanvragen op tafel, onder andere uit Curaçao, Zambia en Zimbabwe. Het project uit Zambia, aangedragen door Janco Dees voor een school in Mpongwe, wordt gehonoreerd.
Het gaat om de aanschaf van meer dan duizend wiskundeboeken, bordpassers, linialen, et cetera. Daarmee is een eerste project gestart. In de daaropvolgende maanden blijft het bestuur het project intensief volgen. Waar worden de boekjes besteld, waarom blijven ze liggen bij de drukker en niet afgeleverd op school? Het project loopt uiteindelijk door tot in 1997 en wordt dan succesvol afgesloten.

Criteria voor subsidie

Ondertussen heeft het Wereldwiskunde Fonds haar definitieve naam gekozen, en presenteert zij zich ook op de jaarvergaderingen naar de Nederlandse achterban. Het Fonds wordt goed gevuld met de contributiebijdragen van de wiskundeleraren en het is zaak om voldoende projecten te gaan ondersteunen om tot een besteding van de middelen te komen. Dat lukt in de daaropvolgende jaren steeds beter en projecten uit Zimbabwe, Mozambique en de Malediven en daarna nog vele andere landen worden gesubsidieerd. Naast bijdragen voor leermaterialen worden ook activiteiten gesubsidieerd, zoals een



Leerlingen van de Kalwala Secondary school in Zambia. Met hulp van het WwF zijn er wiskundeboeken en materialen voor de school aangeschaft, 2015

conferentie voor de bijscholing van leraren.
Tegelijkertijd komt er meer duidelijkheid in de criteria die gehanteerd zullen worden voor het accepteren van projecten:

- focus op wiskundeonderwijs aan middelbare scholen
- zichtbare resultaten
- geen generieke ondersteuning die niet rechtstreeks met wiskundeonderwijs heeft te maken.

Boekenverkoop

In 1997 wordt een start gemaakt met het genereren van extra inkomsten: de verkoop van oude wiskundeboeken. De boeken worden zonder kosten verkregen van collega's en onder andere op de jaarvergadering doorverkocht.
In die tijd is er nog nauwelijks internet en al helemaal geen *Marktplaats.nl*. De hele organisatie, logistiek en administratie van de boekenverkoop is dan ook een forse klus, en vraagt al snel veel aandacht van het bestuur. Het bestuur bestuurt immers niet alleen, maar doet ook al het uitvoerende werk.



Aan de slag met de nieuwe materialen op St Johns school for the deaf in Gambia, 2016/2017



v.l.n.r. Sjaak Schoen en Hans Wisbrun

Later wordt er een online veilingsite ingericht om de verkoop van boeken verder te faciliteren. Honderden boeken vinden via dit kanaal nieuwe eigenaren, en al is het niet het doel van het Fonds, het is mooi om te zien dat velen blij zijn met het verwerven van bijzondere en oude wiskundeboeken.

Meer bekendheid

Rond de eeuwwisseling wordt het Wereldwiskunde Fonds bekender binnen de netwerken van de Nederlandse wiskundeleraren en daarbuiten. Projectaanvragen komen uit alle delen van de wereld en de beoordeling en afhandeling verlopen steeds vlotter. De opkomst van het internettijdperk met zijn snelle communicatiemogelijkheden draagt daar zeker aan bij, evenals de verslagen over de projecten die in *Euclides*, en op de website van de NVvW worden gepubliceerd.
Vaste kracht in het WwF bestuur is in al die jaren Hans Wisbrun. Van tijd tot tijd treden nieuwe leden toe tot het bestuur om voorgangers af te lossen. In 2003 heeft Hans er tien jaar opzitten en ook dan is het voor hem genoeg. Na tien jaar is er een stabiel instituut dat een bijna vanzelfsprekende plaats heeft verworven binnen het wereldje van de Nederlandse wiskundeleraren. Gerben van Lent is de volgende voorzitter van het WwF. In 2006 neemt Sjaak Schoen de voorzittershamer over, en sinds 2014 vervult Evert van de Vrie de voorzittersrol.

Werkwijze

De laatste jaren werkt het Fonds op relatief eenvoudige wijze. Zodra een school of een andere betrokkene op de hoogte is van de mogelijkheden die het Fonds biedt, kan een aanvraagformulier voor financiering van een project worden ingediend. De criteria zijn bij de aanvrager bekend. De aanvraag wordt besproken en beoordeeld door het bestuur van het Wereldwiskunde Fonds.
Bij een positief oordeel wordt de subsidie toegekend. Er wordt achteraf een verslag gemaakt in de vorm van een publiceerbaar artikel, waarvan er vele in *Euclides* zijn verschenen. En ook al zijn ze beperkt de financiën worden zeer zorgvuldig afgehandeld. Overheadkosten zijn er nauwelijks.

Kleinschalige benadering

In de afgelopen 25 jaar is de wereld fors veranderd, onder andere door de verbeterde communicatiemogelijkheden. Ondanks veel voorspoed en prachtige onderwijsfaciliteiten in grote delen van de wereld, zijn er ook altijd nog veel plaatsen waar met zeer primitieve middelen gewerkt moet worden.
Ook de 'ontwikkelingssamenwerking' is veranderd. Langdurige grootschalige projecten van de overheid spelen een minder belangrijke rol en op tal van plaatsen komen kleinschalige particuliere initiatieven tot ontwikkeling. Waar vroeger 'vrijwilligers' voor jaren naar de tropen vertrokken, zijn kortdurende bezoeken nu veel gebruikelijker. Voor het Wereldwiskunde Fonds lijkt er dus nog steeds een relevante rol, die goed past bij de kleinschalige benadering. Helpen met wiskundeboeken is nog steeds nodig, maar ook worden leraren in spé geholpen zich te ontwikkelen. En in de slipstream van het nu bijna overal aanwezig mobiele netwerk blijven de verzoeken binnenkomen om het wiskundeonderwijs wereldwijd verder vooruit te helpen.

> 'VOOR HET WERELDWISKUNDE FONDS LIJKT ER NOG STEEDS EEN RELEVANTE ROL, DIE GOED PAST BIJ DE KLEINSCHALIGE BENADERING IN DE HUIDIGE ONTWIKKELINGSSAMENWERKING.'

Over de auteur

Evert van de Vrie is voorzitter van het Wereldwiskunde Fonds. E-mailadres: *Evert.vandeVrie@ou.nl*

UITDAGENDE PROBLEMEN

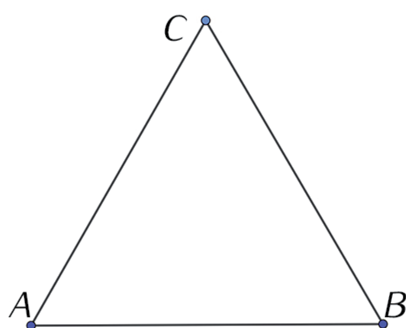
Jacques Jansen

(N + 1) PUNTEN MET ONDERLING GELIJKE AFSTAND

In het platte vlak kun je hooguit drie punten tekenen die op dezelfde afstand van elkaar liggen. In de ruimte zijn dat er maximaal vier. En daarna? Ofwel: Jacques Jansen gaat *n* -dimensionaal.

Platte vlak

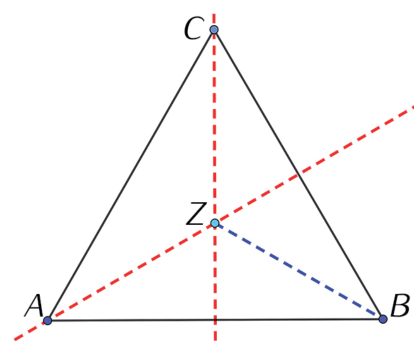
Laatst kreeg ik de vraag: 'hoe teken je punten die de eigenschap hebben dat de onderlinge afstanden hetzelfde zijn?' Een vraag voor wisfaq of het wetenschapsforum. Ik ging eerst zelf aan de slag maar ik zag later op de site van wisfaq.nl de vraag: 'hoeveel punten liggen op een bol, op gelijke afstand van elkaar?' Ene Anneke antwoordt: 'Als je bedoelt: hoeveel punten kunnen er maximaal op een bol liggen, met gelijke afstand van elkaar, dan is het antwoord 4.' De bolmeetkunde laten we maar even voor wat het is.
Eerst maar eens beginnen in het platte vlak met drie verschillende punten. De oplossing is triviaal. We nemen de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek, zie figuur 1.



figuur 1

Je kunt je natuurlijk afvragen of dat in een vlak ook met vier punten kan. Neen, de oplossing is geen vierkant. Het is helemaal niet mogelijk, maar dat moeten we wel bewijzen.

Gegeven is een gelijkzijdige driehoek *ABC*. De punten op gelijke afstand van *A* en *B* liggen op de middelloodlijn van *AB*. De punten op gelijke afstand van *B* en *C* liggen



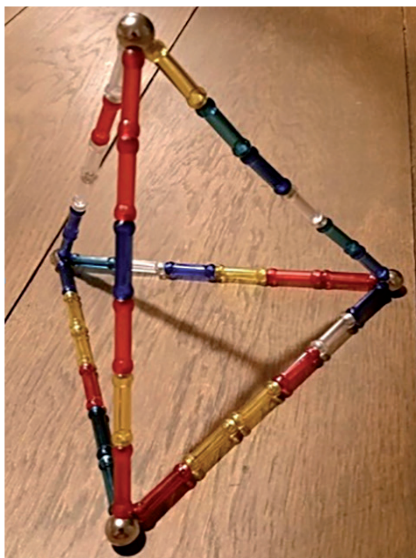
figuur 2

op de middelloodlijn van *BC*. Het snijpunt van die twee middelloodlijnen is het enige punt dat even ver ligt van de punten *A*, *B* en *C*. Dat punt is ook nog eens het zwaartepunt, zie figuur 2. In driehoek *ABZ* geldt dat $AZ = BZ$ en dat *AB* ligt tegenover de grootste hoek (120°). *AZ* en *BZ* zijn dus korter dan zijde *AB*. De conclusie is dat zo'n vierde punt in het platte vlak niet te vinden is.

De ruimte in

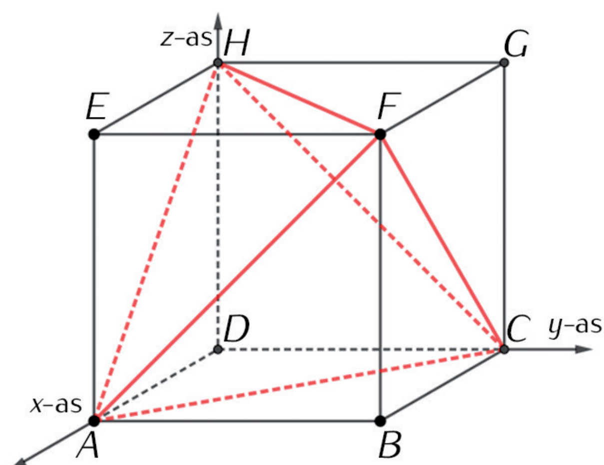
Voor een vierde punt moeten we dus de ruimte in.
De oplossing: neem de hoekpunten van het regelmatig viervlak: de tetraëder, zie figuur 3.

De tetraëder is snel getekend door gebruik te maken van zes zijvlakdiagonalen van bijvoorbeeld een eenheidskubus. De lengte van een zijvlakdiagonaal is $\sqrt{2}$.
Kun je in de ruimte vijf punten vinden waarvan de onderlinge afstanden gelijk zijn? Als er zo'n punt zou zijn dan komen we uit bij het zwaartepunt van een tetraëder. Maar de afstanden van het zwaartepunt naar de hoekpunten van de tetraëder zijn weer kleiner dan de lengte van een ribbe van de tetraëder. Ga voorgaande bewering maar na met behulp van middelloodvlakken. Voor het vinden van een vijfde punt moeten we naar de 4-dimensionale ruimte.


figuur 3

4-dimensionale ruimte

In het vervolg nemen we als uitgangsdriehoek een gelijkzijdige driehoek met zijden √2. Zo'n driehoek kunnen we vinden in eenheidskubus *ABCD.EFGH* met punt *D* in de oorsprong, zie figuur 4.



figuur 4

Bekijk tetraëder *F. ACH* met *F*(1,1,1), *A*(1,0,0), *C*(0,1,0) en *H*(0,0,1). Merk op, dat grondvlak driehoek *ACH* een gelijkzijdige driehoek is met zijden √2. De ribben van de tetraëder zijn dus gelijk aan √2.
We voegen punt *T*(*a*, *b*, *c*, *d*) toe uit de 4-dimensionale ruimte. De punten van de tetraëder krijgen als vierde coördinaat de waarde 0.

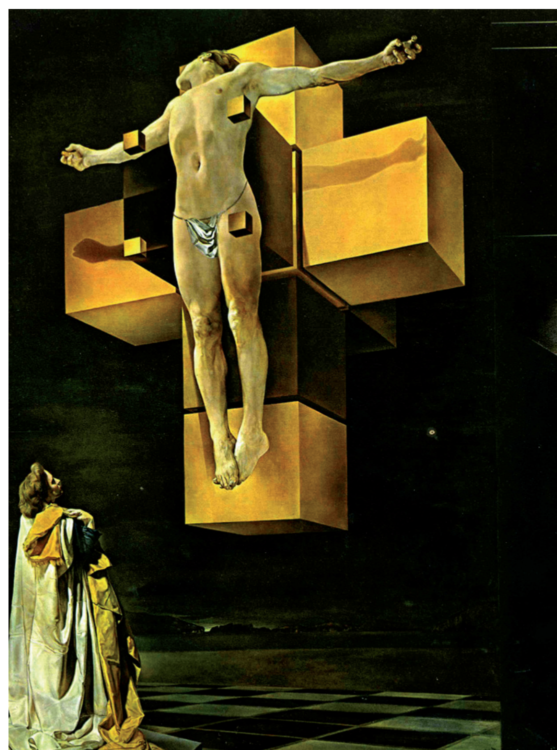
Er moet nu gelden dat: d(*T*, *A*) = d(*T*,*C*) = d(*T*,*H*) = d(*T*,*F*) = √2. We kwadrateren de afstanden. De kwadraten zijn dan gelijk aan 2. Dat levert vier vergelijkingen op met vier onbekenden.

$(a-1)^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2$ (1)
$a^2 + (b-1)^2 + c^2 + d^2 = 2$ (2)
$a^2 + b^2 + (c-1)^2 + d^2 = 2$ (3)
$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 + d^2 = 2$ (4)

Combineren we vergelijking (1) en (2) dan krijgen we $(a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2$ en dat geeft $a = b$.
Combinatie van vergelijkingen (1) en (3) geeft na analogie: $a = c$. Dat geeft voorlopig voor het vijfde punt *T* het rijtje coördinaten (*a*, *a*, *a*, *d*).
Combineren we vergelijkingen (1) en (4) dan krijgen we:

$(a-1)^2 + a^2 + a^2 + d^2 = 2$ (1)
$(a-1)^2 + (a-1)^2 + (a-1)^2 + d^2 = 2$ (4)

Als we deze vergelijkingen weer combineren, raken we term d^2 kwijt en we krijgen $2a^2 = 2(a-1)^2$. En dat geeft a = 1/2. Vullen we dat in vergelijking (1) in, dan geeft dat $d^2 = 5/4$. We hebben voor *d* twee oplossingen.
We vinden dan *T*(½, ½, ½, ½√5) of punt *T*(½, ½, ½, -½√5). Ga maar na! Dit eerste punt *T* zullen we aanduiden met T_4 vanwege de 4-dimensionale ruimte. Kun je dit procedé zo voortzetten? En kunnen we er een voorstelling van maken? Onze leerlingen kennen misschien de hyperkubus in de 4-dimensionale ruimte en hebben *Corpus Hypercubus* (1954) gezien van de Spaanse schilder Salvador Dali.


figuur 5 *Corpus Hypercubus* (1954) Salvador Dali

5-dimensionale ruimte

We werken nu met de vijf punten $F(1, 1, 1, 0, 0)$, $A(1, 0, 0, 0, 0)$, $C(0, 1, 0, 0, 0)$, $H(0, 0, 1, 0, 0)$ en $T_4(½, ½, ½, ½\sqrt{5}, 0)$ en zoeken - de eerste drie coördinaten zijn hetzelfde - dat zesde punt $T_5(a, a, a, d, e)$. We kunnen nu ook het beste met drie vergelijkingen werken gebaseerd op het
feit dat $d(A, T_5)^2 = d(F, T_5)^2 = d(T_4, T_5)^2 = 2$

$(a-1)^2 + 2a^2 + d^2 + e^2 = 2$ (1)
$3(a-1)^2 + d^2 + e^2 = 2$ (2)
$3(a-½)^2 + (d - ½\sqrt{5})^2 + e^2 = 2$ (3)

Term d^2 en e^2 raken we kwijt en krijgen $2a^2 = 2(a-1)^2$. En dat geeft weer $a = ½$. We hebben nu: $T_5(½, ½, ½, d, e)$.

Door (2) en (3) te combineren vinden we: $d = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.

Ga je met (3) verder dan vinden we: $e^2 = \frac{6}{5}$ en hebben we twee oplossingen. We beperken ons tot de oplossing

$T_5(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{6}{5}})$.

Bij de berekeningen valt een terugkerend patroon op voor het toegevoegde punt $T(a, b, c, d, e, ...)$:

Dat uit $AT^2 = CT^2 = HT^2 = FT^2 = 2$ volgt $a = b = c = ½$.

En er volgt ook uit: $\frac{3}{4} + d^2 + e^2 + ... = 2$.

Dus: $d^2 + e^2 + ... = \frac{5}{4}$.

Dit procedé kunnen we voorzetten. In de 6-dimensionale ruimte vinden we: $T_6(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \sqrt{\frac{7}{6}})$ en in de 7-dimensionale ruimte $T_7(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, \sqrt{\frac{8}{7}})$.

Het is nu de hoogste tijd om eens goed te kijken naar de coördinaten van T_4 tot en met T_7 en ons af te vragen of er een patroon te ontdekken valt. Tevens kijken we naar de lengtes van de bijbehorende plaatsvectoren.

Zijn er patronen en regelmatigheden te ontdekken? Zie tabel 1.
En dan valt het kwartje. Een patroon wordt zichtbaar:

$T_n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 5}}, \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 6}}, \frac{1}{\sqrt{6 \cdot 7}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{(n-1) \cdot n}}, \sqrt{\frac{n+1}{n}})$.

Maar is dat ook zo bij de lengte van de plaatsvector van punt T_n? We bekijken weer het kwadraat van deze lengte:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{n+1}{n}$.

Je vraagt je af, of die eerste drie termen te vervangen zijn door termen die mooi aansluiten op de andere termen.
En ja, wat blijkt $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$.

Dus voor de gekwadrateerde lengte kunnen we schrijven

$$(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}) + \frac{n+}{n}$$.

Toegevoegd punt	Coördinaten	Kwadraat van de lengte van de plaatsvector
T_4	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{5}{4}})$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = 2$
T_5	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \sqrt{\frac{6}{5}})$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{6}{5} = 2$
T_6	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \sqrt{\frac{7}{6}})$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{7}{6} = 2$
T_7	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, \sqrt{\frac{8}{7}})$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{8}{7} = 2$
T_8		

tabel 1

Intermezzo

Bekijk de rij van het omgekeerde van een product van twee opeenvolgende getallen: $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{3\cdot 4}$, … en dan de somrij ervan.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}.$$

Vermoeden: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

Een uitdaging voor de lezer: bewijs dit met volledige inductie. Dat valt mee! Maar er is ook een andere aanpak.

De stambreuk $\frac{1}{k(k+1)}$, let op de noemer, lijkt tot stand gekomen door het gelijknamig maken van twee breuken. En die twee breuken zijn ook weer stambreuken:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Dit passen we in de sommatie toe:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Terug naar de somrij die bij de gekwadrateerde lengte hoort:

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\right)+\frac{n+1}{n}=\frac{n-1}{n}+\frac{n+1}{n}=2.$$

Tot slot

Je roept maar een getal, bijvoorbeeld 1001, en we kunnen dan in een 1000-dimensionale ruimte 1001 punten vinden waarvan de onderlinge afstanden steeds hetzelfde zijn. Voor die afstand hebben we voor het gemak √2 gekozen. Verder blijkt dat er 997 punten zijn waarvan de afstand tot de oorsprong ook √2 is. Die 997 punten liggen op een 1000-dimensionale bol met de oorsprong als middelpunt en waarvan de straal √2 is. Drie punten liggen in die bol en een punt ligt buiten die bol.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.n*



BOEKBESPREKING

SNIJPUNT ISFAHAN

Mathilde Boon



Titel: Snijpunt Isfahan
Ondertitel: Een zoektocht van vader en dochter
Auteur: Maite Karssenberg
Uitgever: Querido Fosfor (2018)
Paperback: ISBN 978-90-21406-664-0,
112 pagina's, € 9,99
E-book: ISBN 978-90-21406-665-7, € 5,99

Oneindig in ruimte en tijd

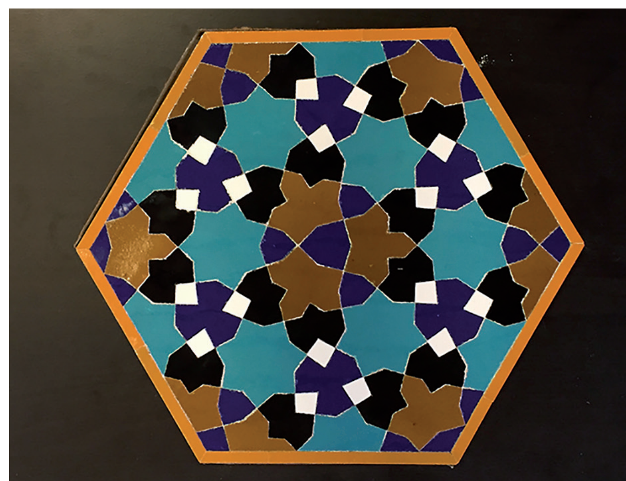
Voor wiskundigen is de islamitische geometrische kunst een feest. Onze beroemde landgenoot Escher heeft dat prachtig beschreven na zijn bezoeken aan het Alhambra te Granada, in 1922 en 1937. 'Het was wonderlijk Oosters', schrijft hij in een brief na zijn eerste bezoek. 'Grote waardigheid' en 'eenvoudige schoonheid' komen in het monumentale bouwwerk samen. Oneindigheid speelt een belangrijke rol, niet ophoudende repetitie. Escher ziet in het Alhambra oneindigheid in ruimte en tijd, twee elementen die in zijn werk steeds weer opduiken. In de islamitische cultuur is een beeldverbod. Escher realiseert zich dat en mijmert na zijn tweede bezoek over het feit dat dat tegelijkertijd de sterkte en de zwakte is van deze islamitische geometrische kunst. Hijzelf aarzelt niet de louter geometrische patronen uit te breiden door planten, dieren, mensen en andere wezens te introduceren in zijn creaties. De islamitische geometrische kunst wordt gemaakt door ambachtslieden, en niet door wiskundigen. Wij weten dat Escher zichzelf ook meer beschouwde als een ambachtsman dan een kunstenaar. Eerst ontstond het ambachtelijke product, pas daarna stortte de wiskunde zich op dit onderwerp. En met groot succes.

'ZEVEN IS DE GRENS TUSSEN HARMONIE EN DISHARMONIE.'

Zevenvoudige symmetrie

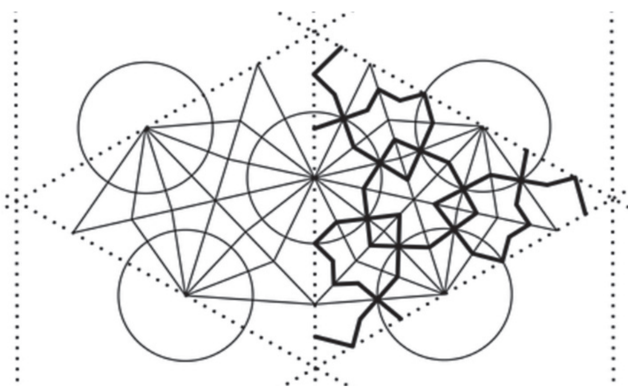
De hoofdpersoon van het boek is vader Goossen Karssenberg, een wiskundedocent, die gegrepen is door de islamitische geometrische kunst. Veel van die kunst is gebaseerd op een vier-, vijf-, of zesvoudig geometrisch grondpatroon. Dat leidt tot veel regelmatige polygonen en polygrammen met vier, vijf of zes zijden of punten, of een veelvoud daarvan. Maar Goossen ontwerpt of ontdekt op zijn zolderkamer in Texel een geometrisch patroon waarin een *zevenvoudige* symmetrie het meest significante element vormt.

De inhoud van het boek geeft niet alleen een zoektocht van vader en dochter, maar tevens een zoektocht van vader naar dochter, en van dochter naar vader. Het goede nieuws is: ze hebben elkaar gevonden!



figuur 1 Het mozaïek met het patroon van Goossen, gefabriceerd in Isfahan

Het minder goede nieuws is: ze hebben Isfahan nog niet gevonden, althans, niet zoals het in de reisgids *The Lonely Planet* wordt voor-gespiegeld, als *The Jewel of Ancient Persia*, als een stad die alleen met superlatieven te beschrijven is. Maite en haar vader zien Isfahan opdoemen vanuit hun rammelende bus, na een uren durende tocht door de woestijn, vanuit Kashan. Ze nemen hun intrek in Hotel Jofa, een muf hotel met bruin leren meubels en nep-houten deuren, niks geen *jewel*. Jammer genoeg hebben ze niet het beroemde Abbasi Hotel uitgekozen, waar geen bruine bank te bekennen is, en waar je de *fine fleur* van Isfahan tegenkomt, theedrinkend op de binnenplaats van de oude karavanserai, omringd door rozen en klaterende fonteinen.



figuur 2 GeoGebra-constructie van het mozaïek van Goossen

Wiskundige esthetiek

Het doel van de tocht van de Karssenbergen is de Iraniërs kennis te laten maken met het unieke geometrische tegelpatroon dat vader Karssenberg ontworpen heeft. Hij is ervan overtuigd dat nog niemand 'zijn' patroon heeft bedacht, en dat gaat hij toetsen in het hol van de leeuw, in Isfahan, stad van de islamitische mozaïeken. Kip in pruimensaus etend in een traditioneel Isfahaans restaurant legt vader Karssenberg uit dat het geometrische patroon van zijn ontwerp een opgeloste puzzel voor hem was. Hij legt dochter Maite uit dat de Iraanse ontwerpers elkaar uitdaagden om iets bijzonders te ontwerpen, een imponerend patroon te bedenken. Daarvoor moet je geometrisch kunnen puzzelen, weten hoe je lijnen kunt draaien of verschuiven om een perfecte symmetrie te bereiken. Het draait allemaal om kennis van wiskundige concepten als spiegelsymmetrie, draaisymmetrie, evenwijdige en loodrechte lijnen... Het gaat volgens vader Karssenberg niet om religieuze, maar om wiskundige esthetiek. De lezer van *Snijpunt Isfahan* maakt kennis met spiegellijnen en verneemt dat zeven de grens is tussen harmonie en disharmonie.

Uniek mozaïek uit Isfahan

Op hun tocht naar erkenning belanden vader en dochter in het Isfahan Mathematics House, waar ze Mr Ghanbari ontmoeten, een van de beste mozaïekmakers van Iran. Een ambachtsman. De hamvraag voor vader en dochter Karssenberg is: kan er een fabriekje gevonden worden dat het ontwerp van Karssenberg in tegeltjes om kan zetten, die mee naar Texel kunnen? Dat kan, Mr Ghanbari krijgt het voor elkaar. Goossen heeft de keuze van de kleuren aan Ghanbari overgelaten, het worden uiteraard de traditionele kleuren van Isfahan. En zo eindigt het verhaal: vader en dochter kunnen met het unieke mozaïek in het vliegtuig naar Nederland stappen.

Workshop

Op 30 maart jl verzorgde Goossen een workshop over zijn mozaïek in Galerie RAT op Texel. Goossen ging uitgebreid in op de constructie van patronen met een zevenvoudige symmetrie, waarvan wiskundigen wel weten dat dat alleen maar goede benaderingen kunnen zijn. Aan de hand van fraaie GeoGebra animaties liet hij zien hoe hij tot het ontwerp van zijn eigen mozaïek gekomen was, zie figuur 2.

Het hoogtepunt van de workshop was uiteraard het bewonderen van het mozaïek uit Isfahan zelf. Voor meer informatie over lezingen en workshops van Goossen: *www.goossenkarssenberg.nl*



figuur 3 Goossen Karssenberg

Over de auteur

Mathilde E. Boon was directeur en patholoog van het Leids Cytologisch en Pathologisch Laboratorium. Sinds 2013 bezoekt ze jaarlijks Isfahan.

HP zet de toon met innovatieve technologie

HP Prime



Wiskunde ontdekken door het gebruik van technologie zal uw leerlingen direct aanspreken. Laat ze eens werken met een rekenmachine die wél aansluit bij hun verwachtingen.



De HP Prime is de enige grafische rekenmachine met technieken van deze tijd: een snelle processor, touchscreen, intuïtieve app-bediening, 3D grafieken en meer. Uiteraard wordt ook gedacht aan de eisen van het huidige onderwijs, met een veilige en gemakkelijke examenstand, video's en lesmateriaal bij de methodes en ondersteuning door wiskunde docenten.

Wij bieden u de HP Prime voor dezelfde prijs als de concurrentie, maar daarvoor krijgt u zoveel meer.

Beoordeel dit nu zelf door met uw leerlingen te werken met de Prime. Zonder kosten, zonder verplichtingen, maar wel mét alle ondersteuning. U ontvangt een aantal Primes van ons en kunt uw leerlingen zelf de proef op de som laten nemen.

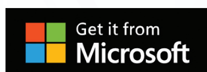
Wedden dat ze nooit meer anders willen?

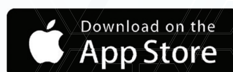


Download een gratis HP Prime-app

voor smartphone, tablet en PC:











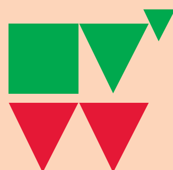


Voor meer informatie en ondersteuningsmaterialen voor in de klas gaat u naar:

www.hp-prime.nl

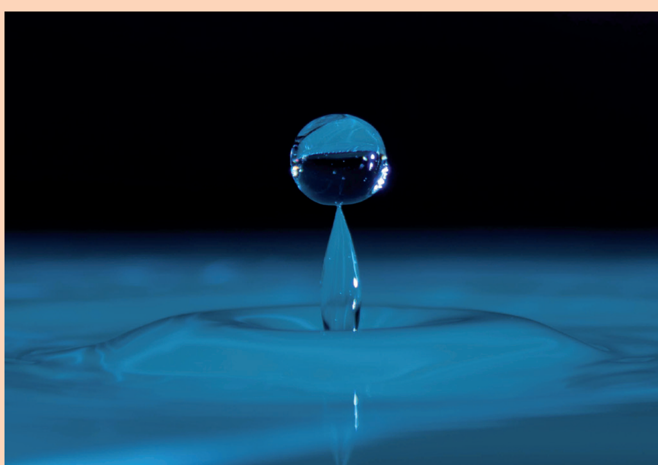
Voor een workshop, demo-units of een schoolofferte neemt u contact op via **info@hp-prime.nl**

JAARVERGADERING/ STUDIEDAG 2018

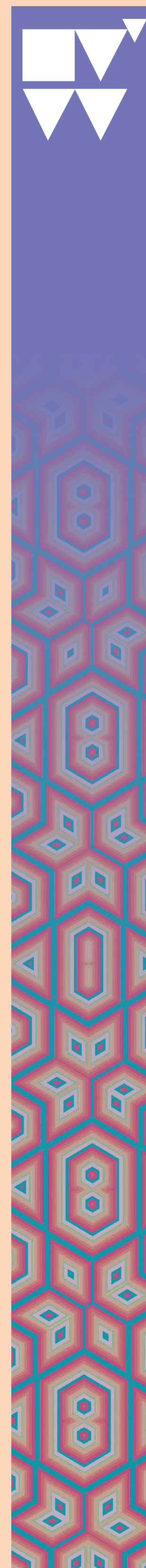


Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 3 november 2018.**
Aanvang: 10.00 uur
Sluiting: 16.15 uur
Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal.

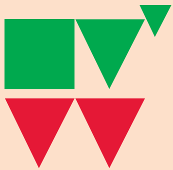


Fotograaf: Siegfried Weitenberg



Thema van de studiedag: Natuur(lijk(e)) wiskunde

'Het boek van de natuur is geschreven in de taal van de wiskunde', Aldus sprak Galilei. Zonnebloemen en konijnen worden door wiskundigen al snel in verband gebracht met Fibonacci. Laat wat vossen los en je kunt experimenteren met een prooi-roofdiermodel. Tenzij het prooidier, zoals sommige cicaden, zich alleen tijdens vreemde priemcycli laten zien. De natuur zit vol wiskundige structuren en patronen. Wiskunde helpt om die te doorzien, te verklaren en te benutten. Hoeveel partners moet je laten gaan om je aan de beste keus te verbinden?
De haakjes in het thema van deze studiedag staan er niet voor niets. Wat is een natuurlijke manier om wiskunde te leren? Is de geschiedenis van de wiskunde een leidraad voor het leerproces van leerlingen, is het de wiskundige structuur zelf, of moeten we zoeken naar leerwegen die voor de leerling betekenisvol zijn? Wellicht is het antwoord afhankelijk van leeftijd, niveau en belangstelling van de leerling. Als je ervaring hebt met een didactische benadering waarmee je leerlingen op een natuurlijke manier een wiskundig begrip of vaardigheid leren, dan hopen we dat je je aanmeldt om een werkgroep te leiden. Tot slot heeft wiskunde natuurlijk een plek in het voortgezet onderwijs. Natuurlijk? Sinds wanneer eigenlijk? We geven wiskunde omdat dit vak nodig is in veel vervolgopleidingen. Maar ook de voorbereiding op burgerschap en de beroepspraktijk worden vaak genoemd. Hoe zit dat eigenlijk? Die balans is vast niet hetzelfde voor alle leerlingen en voor alle niveaus.
Tijdens de studiedag staan natuur en wiskunde, de natuurlijke weg naar wiskunde en het hoe en waarom van 'natuurlijk wiskunde' centraal. Laat je nu alvast inspireren voor het verzorgen van een werkgroep. Verantwoordelijk voor de samenstelling van deze dag zijn Lidy Wesker-Elzinga (*l.wesker@nvvw.nl*) en Michiel Doorman (m.doorman@nvvw.nl). Ideeën voor bijdragen kun je aan hen doorgeven.



Agenda jaarvergadering

10.00-11.00 uur – Jaarvergadering

1. Opening door de voorzitter, Ebrina Smallegange
2. Jaarrede van de voorzitter
3. Wereld Wiskundefonds 25 jaar
4. Notulen van de jaarvergadering 2017
5. Jaarverslagen 2017/2018 van de NVvW en van *Euclides*
6. Jaarrekening en balans 2017/2018, verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie
7. Bestuursverkiezing
   Aftredend zijn: Gert de Kleuver, Lidy Wesker, Gert Treurniet, Tanja Groenendaal, Michiel Doorman en Wim Caspers.
   Zij stellen zich allen herkiesbaar voor een nieuwe termijn.
   Het bestuur nodigt leden uit zich te melden wanneer zij belangstelling hebben voor een plaats in het bestuur (e-mailadres: *secretaris@nvvw.nl*).
   Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen bestuurskandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.
8. Rondvraag
9. Sluiting van de jaarvergadering.

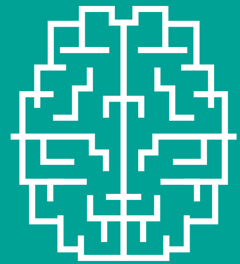
Programma studiedag

(Tijdstippen onder voorbehoud)
11.00 – 11.15 Inleiding op de studiedag
11.15 – 12.00 Plenaire lezing
12.00 – 12.15 Pauze
12.15 – 13.05 Workshopronde 1A/lunch en markt
13.05 – 13.15 Wisseltijd
13.15 – 14.05 Workshopronde 1B/lunch en markt
14.05 – 14.15 Wisseltijd
14.15 – 15.05 Workshopronde 2
15.05 – 15.30 Wisseltijd
15.30 – 16.15 Plenaire voordracht en afsluiting

Iedereen volgt een workshop in ronde 1A óf 1B.
De tijdsindeling van de studiedag biedt deelnemers ruim gelegenheid voor lunch en marktbezoek.

Dus reserveer in je agenda: NVvW-dag op zaterdag 3 november 2018

In het volgende nummer van *Euclides* en via de nieuwsbrief krijg je nadere informatie over wat je kunt verwachten op 3 november 2018. Voor meer praktische informatie over de organisatie kun je je wenden tot Heleen van der Ree (e-mailadres: *hoofdbureau@nvvw.nl*)



BIJZONDERE PRONIKS EN KWADRATEN

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

De eerste drie opgaven van deze puzzel vereisen slechts een beetje handig rekenwerk en opgave 4 wat basale algebra.
Frits Göbel heeft veel onderzoek verricht aan proniks. Daar is in *Euclides* 88-1 al een keer een puzzel over geweest. Ter herinnering: Een pronik is een 'bijna kwadraat': $P(n) = n \cdot (n + 1)$ met n een geheel positief getal, dus het dubbele van een driehoeksgetal. We bekijken nu een aantal speciale proniks en kwadraten. Allereerst zoeken we 'primoriale' proniks $P(n)$. Dat wil zeggen dat P het product is van alle priemgetallen kleiner dan een gegeven getal. Het begint goed: 2, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 3 \cdot 5$ en $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ zijn allemaal 'primoriale' proniks. Maar dat gaat niet zo door: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ is geen pronik. De vraag is of er nog meer zijn. En ja, Frits stuurde ons een groter voorbeeld.

Opgave 1: Bepaal een grotere 'primoriale' pronik en de bijbehorende n in $P = n \cdot (n + 1)$. Schrik niet, het rijtje priemgetallen is in elk geval kleiner dan 10, dus de berekening is te overzien en met een rekenmachine te bepalen.

Frits vond ook de grootste pronik met 10 verschillende cijfers: 9854632170, elk cijfer precies één keer, geen leidende 0. Met een computerprogramma is na te gaan dat daar 52 voorbeelden van zijn. Van kwadraten met die eigenschap bestaan er wel 88. Stel we geven iemand van een van bovengenoemde getallen alleen het cijfer dat staat op positie 0 (*de eenheden*). Kan hij dan weten of dat getal een pronik ofwel een kwadraat is? Soms zal dat lukken, maar niet altijd.

Stel die persoon was niemand minder dan Euclides en zijn antwoord voor een bepaald getal was: 'Ik kan niet weten of het een kwadraat ofwel een pronik is, ik wil graag ook het cijfer weten op positie 1.' Dat deden we en toen wist hij het.



Euclides (3e eeuw v. Chr.)

Opgave 2: Weet je het ook en zo ja welke cijfers stonden op positie 0 en 1? Geef daarbij ook aan hoe Euclides tot zijn antwoord kon komen. Bedenk daarbij dat hij redelijk snel met z'n antwoord kwam en nog niet over een computer of geavanceerde rekenmachine beschikte.

De volgende vraag is: Bestaan er kwadraten of proniks die slechts uit een soort cijfers bestaan, dus bijvoorbeeld enkel vieren: 444...44 ? We beperken ons dan tot getallen van meer dan één cijfer. Er zijn negen opties te onderzoeken (allemaal nullen telt niet mee).

Opgave 3a: Onderzoek voor zowel kwadraten als voor proniks welke cijfers we daarbij kunnen uitsluiten en licht je antwoorden toe.

Voor de cijfers die hierbij niet zijn uitgesloten is het wellicht mogelijk om een pronik of kwadraat te vinden die begint met een aantal gelijke cijfers, en wel net zoveel als je zou willen.

Opgave 3b: Bepaal zowel voor kwadraten als voor porniks een voorbeeld waarbij op de eerste vier posities gelijke cijfers staan. Toon aan hoe je dit hebt bepaald, want het is niet de bedoeling dat je dit programmeert met de computer of rekenmachine.

Frits stuurde ons ook een serie proniks die te genereren zijn met een machtsfunctie:

Gegeven de functie $f(n)=\frac{k^n-1}{4}$

Voor k = 9 is $f(n)$ voor alle gehele positieve waarden van n een pronik. En bovendien geldt de recursie
$f(n+1) = 9 \cdot f(n) + s$.

Opgave 4
a: Bewijs dit en bepaal s.
b: Voor welke andere waarden van k geldt dit ook en welke s hoort daar dan bij?

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij je idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En je hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op 25 augustus 2018 binnen zijn.

 *vakbladeuclides.nl/937puzzel*

Top 10 ladderstand na 93-5

H. Linders	159
K. Vugs	149
M. Woldinga	118
F. van Hoeve	101
M. Rijnierse	89
R. Stolwijk	89
F. Göbel	87
K. van der Straaten	78
B. Groot	74
G. Bouwhuis	74

We feliciteren Hans Linders van harte met de ladderprijs.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallengange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2018

24/8 en 25/8, 31/8 en 1/9
EINDHOVEN (aug) en AMSTERDAM (aug/sep)
Vakantiecursus 'Cryptografie: wiskunde in het dagelijks leven'
Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

vr 14/9
EINDHOVEN
Finale wiskunde olympiade 2018

ma 17/9
UTRECHT
Optimaal voorbereid naar het eindexamen
Organisatie: NVvW en SLO

do 11/10
UTRECHT
Onderwijs meets onderzoek
Organisatie: NVvW, Freudenthalinstituut, SLO

za 13/10
UTRECHT
Symposium werkgroep geschiedenis

za 3/11
VEENENDAAL
Jaarvergadering/studiedag NVvW
Organisatie: NVvW

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 94

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	4 september 2018	18 juni 2018
2	30 oktober 2018	27 augustus 2018
3	17 december 2018	15 oktober 2018
4	29 januari 2019	19 november 2018
5	19 maart 2019	7 januari 2019
6	7 mei 2019	4 maart 2019
7	26 juni 2019	29 april 2019

CASIO®

Casio fx-CG50

Een mooi nieuw design met de vertrouwde functionaliteit!

De Casio fx-CG50 is de vervanger van de fx-CG20. Hij heeft de vertrouwde functionaliteit plus een aantal handige toevoegingen. Onderscheidend zijn de carbon look, heldere stevige toetsen en verdiept beeldscherm met minder kans op beschadiging. Dit voor dezelfde prijs als de fx-CG20!



CvTE goedgekeurd

Bestel direct uw docentenexemplaar voor maar € 39,50*
Stuur een e-mail naar educatie@casio.nl. Vermeld in de e-mail uw naam, de naam en het adres van uw school, het schooltype en uw mobiele telefoonnummer.

Bekijk de video's op: www.youtube.com/c/CASIOCOLLEGE

* Inclusief btw en verzending